Chapitre2 : Notions de Probabilité :

1 Introduction

Dans le domaine scientifique, on s'intéresse à de nombreux phénomènes dans lesquels apparait souvent l'effet du hasard faisant appel à la notion de probabilité. Donc les resultats des observations varient d'une expérience à l'autre. Une expérience est appelé aléatoire s'il est impossible de prévoir son résultat et si, répétée dans des conditions identiques, elle peut donner des resultats différents. La variation de ces resultats peut être visualisée par des diagrammes, des histogrammes, des courbes cumulatives de fréquence.

1.1 Nomenclature :

1.1.1 Terminologie de base

A) Expérience aléatoire :

Une expérience aléatoire est un choix au hasard d'un point ω dans en ensemble Ω

Exemple : lancé d'une pièce de monnaie Ω ={ Pile ,face }

Dé : Ω= {1,2,3,4,5,6}

Résultat équipe de foot Ω ={Victoire , défaite, match nul}

B) Evènement aléatoire :

Un évènement aléatoire A est la partie de Ω dont les évènements réalisent l'évènement A

1.1.2 Divers terminologie :

- A tout évènement A est associé son contraire (Non A) ou ($\bar{A}$) ou A^c
- A.B : l'évènement (A et B) est réalisé si A est réalisé et B est réalisé en même temps soit (A $\cap$ B) : intersection.
- L'évènement (A ou B) est réalisé si l'un des deux ou les deux sont réalisés (A $\cup$ B) : réunion.
- Deux évènements A et B sont incompatible si la réalisation de l'un implique la non réalisation de l'autre.
- Si A est un évènement composé alors $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{card(A)}{Card(\Omega)}$ Où m est le nombre de cas favorables et n le nombre de cas possibles.

1.1.3 Mesure de probabilité :

Une probabilité Pr définie l'ensemble (Ω,C) est une application de C dans [0,1] telle que :

- Pr(Ω)=1 ,Pr($\cup$ A_i)=ΣPr(A_i) pour les évènements incompatible
- Pr(A)=1-P($\bar{A}$)
- Pr(A$\cup$B)=P(A)+P(B)-P(A $\cap$ B)
- Si B est un système complet d'évènements alors : $\forall$A P(A)= ΣP(A$\cap$ B_i)

A) Evènement indépendants

Soit A et B deux évènements, on dit que A et B sont indépendants si :

P(A$\cap$B)=P(A).P(B)

Exemple :

1.2 Probabilité conditionnelle :

Soit (Ω,C,P) un espace probabilisé , on s'intéresse a la réalisation de l'évènements A sachant l'évènement B réalisé c'est-à-dire la probabilité conditionnelle sachant B ,elle est définie par :

$$\forall A \in C \quad P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Principe des probabilités composées :

$$P(A \cap B) = P(A/B)P(B) = P(B/A)P(A)$$

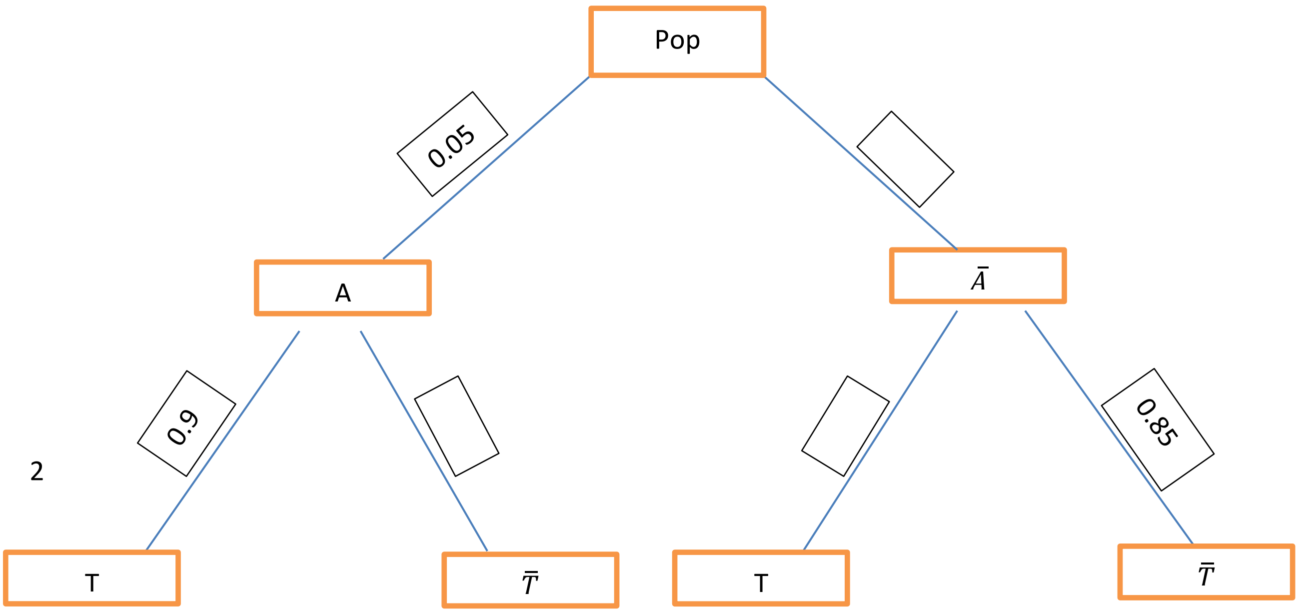
1.2.1 Théorème de Bayes

$$P(C_i/A) = \frac{P(A/C_i)P(C_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A/C_i)\,P(C_i)} = \frac{P(A \cap C_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A \cap C_i)}$$

Exemple

Soit une population d'enfant, les études statistique ont montré qu'un enfant sur 20 était porteur du gène A. la probabilité qu'un enfant soit porteur du caractère A ait un test positif est de 0.90.

La probabilité qu'un enfant ait un test négatif sachant qu'il n'est non porteur du caractère A est de 0.85.calculer les différentes probabilités ?



Solution :

Les données

$$P(A) = 0.05; P(T/A) = 0.90\ ;\ P(\overline{T}\ /\bar{A}\ ) = 0.85$$

Les calculs :

$\longrightarrow$

$\longrightarrow$

$\longrightarrow$

$$P(\bar{T}/\bar{A}\ ) + P(T/\bar{A}\ ) = 1\ donc\ P(T/\bar{A}\ ) = 1 - P(\bar{T}/\bar{A}\ ) = 1 - 0.85 = 0.15$$

$$P(\bar{A}\ \cap T) = P(\bar{A}\ ).P(T/\bar{A}\ ) = 0{,}95.0{,}15 = 0.1425$$

$$P(\bar{A}\ \cap \bar{T}) = P(\bar{A}\ ).P(\bar{T}/\bar{A}\ ) = 0{,}95.0{,}85 = 0.8075$$

$$P(T) = P(\bar{A}\ \cap T) + P(A \cap T) = 0.045 + 0.1425 = 0.1875$$

$$P(\bar{T}) = P(A \cap \bar{T}) + P(\bar{A}\ \cap \bar{T}) = 0.005 + 0.8075 = 0.8125$$

Une façon de vérifier la justesse de mes calculs :

$$\begin{aligned} P(\bar{T}) + P(T) = 1 &= 0.8125 + 0.1875 \\ &= 1\ \ c'est\ bon\ je\ peux\ continuer\ sinon\ je\ fais\ demi-tour\ ou\ je\ depose\ les\ armes \end{aligned}$$

$\longrightarrow$

$$P(\overline{A}\ /T) = \frac{P(\overline{A}\ \cap T)}{P(T)} = \frac{0.1425}{0.1875} = 0.76$$

Une façon de vérifier la justesse de mes calculs:

$$P(A/T) + P(\bar{A}\ /T) = \ 0.24 + 0.76 = 1$$

$$c'est\ bon\ je\ peux\ continuer\ sinon\ je\ fais\ demi-tour\ ou\ je\ depose\ les\ armes$$

$$P(A/\overline{T}) = \frac{P(A \cap \overline{T})}{P(\overline{T})} = \frac{0.005}{0.8125} = 0.006$$

$$P(\overline{A}\ /\overline{T}) = \frac{P(\overline{A}\ \cap \overline{T})}{P(\overline{T})} = \frac{0.8075}{0.8125} = 0.994$$

Une façon de vérifier la justesse de mes calculs:

$$P(A/T) + P(\bar{A}\ /T) = \ 0.24 + 0.76 = 1$$

la pas de demi tour , a ce stade obliger de deposer les armes faute de temps pour plus de calcul X :