Table des Matières

1 Chapitre 2: Maxim et minim **2**

1.1 problèmes d'optimisation 2

1.1.1 Existence et unicité de la solution 3

1.1.2 Condition nécessaires et suffisantes 4

1.1.3 Cas sans contraintes 5

1.1.4 Cône tangent et Cône normal 5

1.1.5 Cas avec contraintes 6

1.1.6 Fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles 7

1.1.7 Fonctions d'un espace de dimension finie à valeurs réelles 8

Chapitre 1

Chapitre 2: Maxim et minim

1.1 problèmes d'optimisation

Mathématiquement, le problème d'optimisation se formule de la façon suivante:

1) Problème sans contraintes:

$$\begin{cases} \min f(x) \\ \text{x} \in X \end{cases}$$

$f : X \to \mathbb{R}$ une fonction (X un espace de Banach)

2)Problème avec contraintes:

$$\begin{cases} \min f(x) \\ \text{x} \in D \end{cases}$$

D un sous ensemble dans X.

Remarque 1 *Il s'agit dans ce cas de minimiser une fonctionnelle $f : X \to \mathbb{R}$ sur un e v n de dimension infinie*

.) *les contraintes sont souvent de type inégalités :*

$$D = \{x \in X \ / g_i(x) \leq 0, \forall i = I\}.$$

Ou égalités

$$D = \{x \in X \ / g_i(x) = 0, \forall i = I\}.$$

Les fonctions g_i sont au moins continues de X dans $\mathbb{R}$.

Introduisons maintenant la définition suivante :

Définition 1.1.1 *Soit une contraintes inégalité $\varphi_i(x) \leq 0$ et x_0 un point de X. Si x_0 satisfait $\varphi_i(x_0) < 0$, on dit que la contrainte est inactive en x_0. Si x_0 satisfait $\varphi_i(x) = 0$, on dit que la contrainte est active ou saturée en x_0.*

Il est important de distinguer entre minimum local et globale.

Définition 1.1.2 (*minimum global*)

Un point $x_0 \in D$ vérifiant :

$$f(x_0) \leq f(x), \forall x \in D,$$

est appelé minimum global.

Définition 1.1.3 (*minimum local*)

Un point x_0 de D est dit minimum local, s'il existe un voisinage V de x_0 vérifiant:

$$f(x_0) \leq f(x), \forall x \in V \cap D$$

Définition 1.1.4 (*maximum global*)

Un point $x_0 \in D$ vérifiant :

$$f(x_0) \geq f(x), \forall x \in D,$$

est appelé maximum global.

Définition 1.1.5 (*maximum local*)

Un point x_0 de D est dit minimum local, s'il existe un voisinage V de x_0 vérifiant:

$$f(x_0) \geq f(x), \forall x \in V \cap D$$

1.1.1 Existence et unicité de la solution

Afin de pouvoir calculer ou approcher facilement la solution d'un problème d'optimisation, il est intéressant de connaître les hypothèses garantissant l'‘existence et l'‘unicité de cette solution.

Existence :

Théorème 1.1.1 *Si* $f : D \subset X \to \mathbb{R}$ *est continue et si* D *est un ensemble compact, alors* f *possède un minimum sur* D

Théorème 1.1.2 *On suppose:*

1)L'esemble D *est fermé et il existe un point de* D *en lequel* f *est finie.*

2)f *est continue sur* X.

3) $\lim\limits_{\|x\|\to+\infty, x\in D} f(x) = +\infty$ *(i.e f est coercive).*

Alors f possède un minimum sur D.

Unicité : Le résultat suivant montre l'impact de la convexité dans les problèmes d'optimisation.

Définition 1.1.6 *Une fonction* $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ *est dite convexe sur* X *si et seulement si :*

$$f\left[\lambda x + (1-\lambda)y\right] \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y), \forall (x,y) \in X^2, \forall \lambda \in [0,1]$$

Une fonction f est dite concave si $(-f)$ *est convexe.*

.)On rappelle que la convexité stricte c'est la convexité en remplaçant les inégalités larges par les inégalités strictes.

Proposition 1.1.1

Soit f *une fonction convexe définie sur un ensemble convexe* D. *Alors,*

.)Tout minimum local de f *sur* D *est un minimum global.*

.)Si f *est strictement convexe, il y a au plus un minimum global.*

1.1.2 Condition nécessaires et suffisantes

Les conditions nécessaires et suffisantes de minimalité permettent de caractériser le minimum de f.

Nous supposons dans tout ce paragraphe que X est un espace de Hilbert, $D \subset X$ et f est deux fois différentiables . On notera x^* un minimum (local) de f.

1.1.3 Cas sans contraintes

Ce qui suit reste valabe dans le cas où le minimum x^* se trouve a l'intérieur de l'ensemble des contraintes.

Nous donnons les conditions nécessaires de minimum, puis celles suffisantes.

Théorème 1.1.3 [*conditions nécessaires*]

Les deux conditions nécessaires sont les suivantes

•*Condition au premier ordre: Si f est G -différentiable en x^*, on a $\nabla f(x^*) = 0$*

•*Condition au second ordre: Si f est deux fois différentiable au point x^*, alors $D^2 f(x^*)$ est positive i.e*

$$\left\langle D^2 f(x^*) y, y \right\rangle \geq 0, \forall y \in X.$$

Théorème 1.1.4 [*condition suffisantes*]

Les conditions suffisantes peuvent être aussi du premier ou du second ordre :

•*Conditions au premier ordre:*

Si f convexe, G -différentiable et si x^* est tel que $\nabla f(x^*) = 0$ alors x^* est un minimum global de f.

•*Conditions au second ordre:*

Si f est deux fois différentiables et si x^* est tel que $\nabla f(x^*) = 0$ et $D^2 f(x^*)$ définie positive alors x^* est un minimum local de f.

1.1.4 Cône tangent et Cône normal

Cône

Définition 1.1.7 *Un sous ensemble C est un Cône si :*

$$\forall x \in C,\ \forall \alpha \geq 0,\ \alpha x \in C.$$

C'est à dire :

$$\forall \alpha \geq 0,\ \alpha C \subset C.$$

Cône tangent

Définition 1.1.8 *Soit S un sous-ensemble de l' e.v.n X. On dit que x est tangent à S au point $a \in S$, s'il existe une suite $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de réels positifs et une suite$(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de S telles que*

$$\lim_{k\to\infty} x_k = a \ \ et \ \lim_{k\to\infty} \lambda_k (x_k - a) = x$$

Remarque 2 *L'ensemble des x tangents à S noté $T(S,a)$*

Cône polaire

Définition 1.1.9 *Dans l'espace de banach X, le Cône polaire d'un sous ensemble D est défini par :*

$$D^{\circ} = \{x^* \subset X^* / < x^*, v > \leq 0, \forall v \in D\}$$

Cône normal

Définition 1.1.10 *On appelle cône normal à S en a le cône polaire du Cône tangent, et il est noté: $N(S,a)$.*

1.1.5 Cas avec contraintes

Considérons le problème

$$(P)\begin{cases} \min f(x) \\ \text{x} \in D \end{cases}$$

Théorème 1.1.5 *Si f est G -différentiable en x^* et x^* est un minimum local du problème (P) alors:*

$$\langle \nabla f(x^*), v\rangle \geq 0, \forall v \in T(D, x^*)$$

Proposition 1.1.2 *Si l'objectif f et le domaine D du problème (P) sont convexes alors on aura la réciproque du théorème précédent.*

Proposition 1.1.3 *Si f est G -différentiable en x^* et x^* est un minimum local du problème (P) alors:*

$$0 \in \nabla f(x^*) + N(D, x^*)$$

1.1.6 Fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles

Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $[a,b]$ et $x_0 \in \left]a,b\right[$.

On dit que la fonction f admet un **maximum local** au point x_0 s'il existe un réel r tel que

$$\forall x \in \left]x_0 - r, x_0 + r\right[\subset [a,b], f(x) \leq f(x_0).$$

On dit que la fonction f admet un **minimum local** au point x_0 s'il existe un réel r tel que

$$\forall x \in \left]x_0 - r, x_0 + r\right[\subset [a,b], f(x_0) \leq f(x).$$

On dit que la fonction f présente au point x_0 un **extremum**, si elle admet un maximum ou un minimum au point x_0.

Proposition 1.1.4 *Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[a,b]$. Supposons que f présente un **extremum** au point x_0. Si f est dérivable au point x_0 alors $f'(x_0) = 0$.*

Preuve. Supposons que l'extremum est un maximum. Il existe alors un réel r tel que

$$\forall x \in \left]x_0 - r, x_0 + r\right[\subset [a,b], f(x) \leq f(x_0).$$

donc

$$\begin{cases} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0, \forall x \in \left]x_0, x_0 + r\right[\\ \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0, \forall x \in \left]x_0 - r, x_0\right[\end{cases}$$

et on a f est dérivable au point x_0 on trouve $f'(x_0) \leq 0$ et $f'(x_0) \geq 0$ c'est a dire $f'(x_0) = 0$.

Nous utilisons mème méthode pour l'extremum est un minimum. ■

Exemple 1 $f(x) = x^2$. $f'(x) = 2x$, $x = 0$ *est un minimum et on a* $f'(0) = 0$

La réciproque de la proposition est fausse

Exemple 2 $f(x) = x^3$. $f(x) = 3x^2$.

Définition 1.1.11 *Les points ou la dérivée de f est nulle sont appelés **points critiques**.*

1) Etude des extremums par l'aidé de la signe de la dérivée.

Signe de la dérivée $f'(x)$ au voisinage de point critique x_0			Nature du point critique
$x < x_0$	$x = x_0$	$x_0 < x$	
$+$	0	$-$	Maximum
$-$	0	$+$	Minimum
$-$	0	$-$	ni maximum ni minimum
$+$	0	$+$	ni maximum ni minimum

2) Etude des extremums par l'aidé de la dérivée seconde

$f'(x_0)$	$f''(x_0)$	Nature du point critique
0	$-$	Maximum
0	$+$	Minimum
0	0	non déterminé

Exemple 3 *Montrons que la fonction $f(x) = -x^2 + 2x$ admet un maximum en 1.*

on a $f'(1) = -2 + 2 = 0, f''(1) = -2$

donc admet un maximum en 1.

Exemple 4 *est ce que la fonction $f(x) = tgx + e^x$ admet des points critique.*

on a $f'(x) = 1 + tg^2x + e^x \geq 1$

donc la fonction f n'admet pas des points critique.

1.1.7 Fonctions d'un espace de dimension finie à valeurs réelles

Théorème 1.1.6 *Soit $f : U \subset R^n \to R$ une fonction de classe C^2 et $a \in U$ point critique de f. Alors*

1. Si Hess f_a est définie positive (resp. définie négative) alors f admet un minimum (res.maximum) local strict en a.

2. Si f admet un minimum (resp. maximum) local en a alors Hess fa est positive (resp. négative).