Université Ahmed Zabana-Relizane

Fiche TD 2- Calcul diff 2-master 1 -2021/2022

$1^{ère}$ année master-LMD-Maths

Exercice 1:

Soit $N : \mathbb{R}^n : ||.||_\infty \to \mathbb{R}$ une norme et $S(0,1)$ la sphère unité pour la norme infinie.

Montrer que N atteint son minimum sur $S(0,1)$.

Exercice 2:

Soit U un ouvert de $R^2, f : U \to R$ deux fois differentiable sur U

et $a \in U$ un point critique de f et $\triangle(a)$ le déterminant de $D^2 f(a)$.

Montrer que:

(i) Si $\triangle(a) > 0$,$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(a) > 0$ ou $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(a) > 0$ alors f admet un minimum local strict en a.

(ii) Si $\triangle(a) > 0$,$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(a) < 0$ ou $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(a) < 0$ alors f admet un maximum local strict en a.

Exercice 3: Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable en x_0 .

(i) Si f est convexe, montrer que

$$\forall x \in I,\ f(x) \geq f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$$

(ii) Si f est strictement convexe, montrer que

$$\forall x \in I/\{x_0\},\ f(x) > f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$$

(iii) f est convexe si et seulement si f' est une fonction croissante.

Exercice 4: Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$.

Déterminer les extrema de f.