

Leçon n°4 : Loi d'Ohm et de Joule

1. Introduction

Le terme courant électrique plus communément désigné par "courant" permet de décrire le déplacement de toute charge électrique traversant une région donnée. La plupart des applications pratiques de l'électricité utilisent les courants électriques.

Le déplacement de la charge s'effectue généralement à travers un conducteur tel qu'un fil de cuivre ou un liquide (par exemple électrolyte). Cependant des courants peuvent exister sans conducteur, c'est le cas d'un faisceau d'électrons circulant dans un tube électronique (ancien téléviseur).

La pile est un système capable de fournir un courant. Celui-ci peut alimenter le filament d'une lampe de poche et produire de la lumière.

2. Le courant électrique

Chaque fois qu'il se produit un déplacement de charges, on dit qu'un courant passe. Le courant représente le débit de charge à travers une surface S.

Si ΔQ est la charge nette traversant S durant un intervalle de temps Δt , l'intensité du courant I est donné par la relation :

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

Si ce débit de charges varie dans le temps, I varie également dans le temps et on exprime I à l'instant t par :

$$\boxed{I = \frac{dQ}{dt}} \quad [4. 1]$$

L'ampère est l'unité d'intensité I, qui correspond à la charge de 1 Coulomb (C) traversant la surface S en 1 seconde $\Rightarrow 1 \text{ A} = 1 \text{ C/s} = 1 \text{ C s}^{-1}$.

Par convention, le sens du courant est le même que le sens de déplacement des charges positives.

Dans un conducteur métallique, le courant résulte du mouvement des électrons portant une charge négative : le sens du courant est donc opposé au déplacement des électrons.

Soit un conducteur de section S uniforme. Le volume correspondant à un élément du conducteur de longueur Δl est $\Delta V = S \Delta l$.

Si n désigne le nombre de charges mobiles par unité de volume, alors ΔV contient $n \Delta V = n S \Delta l$ charges.

Appelons q la charge de chaque porteur de charge.

La valeur totale des charges mobiles est donc donnée par : $\Delta Q = (n S \Delta l) q$.

Si on suppose que ces charges se déplacent à la vitesse v , la distance parcourue par ces charges sera donc $\Delta l = v \Delta t$ d'où $\Delta Q = (n S v \Delta t) q$.

Il s'en suit que :

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = n q v S \quad [4. 2]$$

La vitesse v est une vitesse moyenne appelée vitesse de dérive ou d'entraînement.

Application

Soit un fil de cuivre de rayon $r = 1 \text{ mm}$ qui transporte un courant $I = 10 \text{ A}$, calculer la vitesse de dérive des électrons.

Données :

Le cuivre a un électron de conduction par atome, sa masse atomique M est égale à 64 g/mol et sa masse volumique $\rho = 8900 \text{ Kg.m}^{-3}$,

e = charge de l'électron = $- 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

Nombre d'Avogadro = $N_a = 6.02 \cdot 10^{23}$

Solution

Dans le cas du cuivre, les porteurs de charge sont des électrons. On a donc $q = e$

$$\text{Or : } I = n e v S \Leftrightarrow v = \frac{I}{n e S}.$$

On nous donne la valeur de I , on peut trouver la valeur de S . Sachant que N est le nombre d'électrons de conduction, il reste à déterminer la valeur de n = nombre d'électrons par unité

$$\text{de volume } V : n = \frac{N}{V}$$

Puisque le cuivre possède un électron mobile par atome, N est donc égal au nombre d'atomes dans le fil.

La masse volumique $\rho = \frac{m}{V} = \frac{\text{masse du fil}}{\text{Volume du fil}}$

La densité électronique s'écrit :

$$n = N \frac{\rho}{m}$$

En introduisant le nombre d'atomes par mole

$$\frac{n}{\rho} = \frac{N}{m} = \frac{N_A}{M}$$

Il vient :

$$n = \frac{N_A}{M} \rho$$

Par conséquent : $v = \frac{I}{n e S} = \frac{I}{\frac{\rho \times N_A}{M} \times e \times \pi r^2} = \frac{I \times M}{\rho \times N_A \times e \times \pi r^2}$

Application numérique : $v = \frac{10 \times 64 \times 10^{-3}}{8900 \times 6.02 \times 10^{23} \times 1.6 \times 10^{-19} \times \pi \times (10^{-3})^2} = 2.38 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}$

Les électrons se déplacent donc très lentement, contrairement à ce que l'on pourrait supposer : il leur faut à peu près 4200 secondes, ou plus d'une heure, pour parcourir un mètre !

3. Résistance et Loi d'Ohm

3.1. Loi d'Ohm

On appelle densité de courant à l'intérieur du conducteur la quantité J :

$$\boxed{J = \frac{I}{S} = n q v \text{ en A/m}^2} \quad [4.3]$$

J est aussi une grandeur vectorielle : $\vec{J} = n q \vec{v}$.

Si on entretient une différence de potentiel aux extrémités d'un conducteur, il s'y établit à l'intérieur un champ $\vec{E}$. On pose :

$$\boxed{\vec{J} = \sigma \vec{E}} \quad [4.4]$$

σ est la conductivité du conducteur. Elle représente "la facilité" qu'ont les porteurs de charges à se mouvoir sous l'influence d'un champ électrique. L'inverse de la conductivité σ est la résistivité ρ . Conductivité et résistivité sont des caractéristiques électriques locales d'un matériau.

Les matériaux, tels que l'on puisse écrire $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ sont dits « ohmiques » ou qu'ils obéissent à la loi d'Ohm.

3.2. Résistance et résistivité

Soit un segment de fil rectiligne de longueur l et de section S . Soit $\Delta V = V_A - V_B$ la différence de potentiel appliquée aux extrémités. Le champ électrique $\vec{E}$ est supposé uniforme, par conséquent : $\Delta V = E l$

Soit $\vec{J}$ le vecteur densité de courant : $J = \sigma E = \sigma \frac{\Delta V}{l}$

Or $J = \frac{I}{S}$, On peut donc écrire :

$$J = \frac{I}{S} = \sigma \frac{\Delta V}{l} \Leftrightarrow \Delta V = \left(\frac{l}{\sigma S} \right) I$$

La quantité $\left(\frac{l}{\sigma S} \right)$ s'appelle résistance R du conducteur, et on a :

$$\boxed{R = \frac{l}{\sigma S} = \frac{\rho l}{S}} \quad [4.5]$$

Avec $\rho = \frac{1}{\sigma}$: la résistivité

La loi d'Ohm est alors donnée par la relation :

$$\boxed{\Delta V = R I} \quad [4.6]$$

Unités

R s'exprime en Ohm (Ω)

ρ s'exprime en Ohm ($\Omega.m$)

σ s'exprime en Siemens. m^{-1} ($S.m^{-1}$)

3.2.1. Association des résistances en série

La résistance R équivalente à deux résistors en série se calcule aisément: Les deux résistances sont traversées par le même courant d'intensité I .

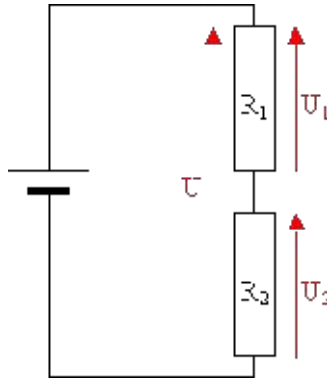


Fig. 1 : Association en série de deux résistances

La loi d'Ohm appliquée à chacune des résistances donne :

$$\begin{cases} U_1 = R_1 I \\ U_2 = R_2 I \end{cases}$$

La tension U aux bornes de l'ensemble est égale à la somme des tensions aux bornes de chacun : $U = U_1 + U_2$

$$U = RI = R_1 I + R_2 I \Rightarrow U = RI = (R_1 + R_2) I$$

La résistance équivalente $R = \frac{U}{I}$ vaut donc :

$$R = R_1 + R_2$$

Cette relation peut se généraliser pour un nombre quelconque de résistances : la résistance d'un ensemble de résistances en série est égale à la somme de leurs résistances :

$$\boxed{R = \sum_i R_i} \quad [4.7]$$

3.2.2. Associations de résistances en parallèle

Calculons la résistance R équivalente à deux résistances en parallèle.

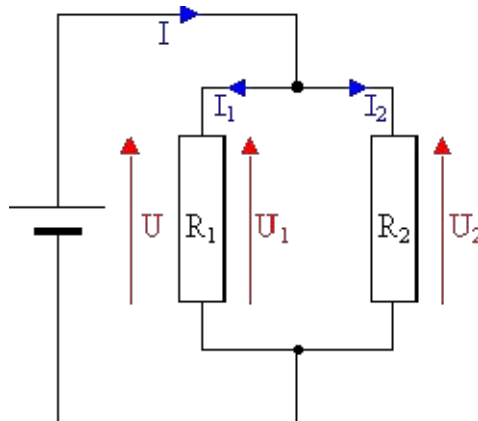


Fig. 2 : Association en parallèle de deux résistances

Les deux résistances sont soumises à la même tension : $U = U_1 = U_2$

L'intensité du courant du générateur est égale à la somme des intensités des courants circulant

dans les résistances : $I = I_1 + I_2 \Leftrightarrow \frac{U}{R} = I_1 + I_2$

La loi d'Ohm appliquée à chacun des résistors donne :

$$\begin{cases} U_1 = R_1 I \\ U_2 = R_2 I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} I_1 = \frac{U}{R_1} \\ I_2 = \frac{U}{R_2} \end{cases}$$

Par conséquent : $\frac{U}{R} = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} \Leftrightarrow \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$

Cette relation peut se généraliser pour un nombre quelconque de résistances, la résistance équivalente R est telle que :

$$\boxed{\frac{1}{R} = \sum_i \frac{1}{R_i}} \quad [4.8]$$

Remarques :

- $\frac{1}{R}$ est appelée conductance équivalente du circuit. La conductance d'un ensemble de résistances en parallèle est égale à la somme de leurs conductances.
- Cas particuliers : la résistance équivalente à n résistances de même valeur R_1 est :

$$R = \frac{R_1}{n}$$

3.2.3. Résistivité de certains métaux, alliages métalliques et non métaux

Dans ce tableau, et à titre d'exemple, sont données les valeurs de résistivité de différents types de matériaux.

Matériau	Résistivité $\times 10^{-8} \Omega \cdot m$		Matériau	Résistivité $\times 10^{-8} \Omega \cdot m$
Argent	1,6		Platine	10
Cuivre	1,7		Fer	10
or	2,4		Silicium	10
Aluminium	2,7		Etain	18
Zinc	6		Constantan	49
Nickel	7		Mercure	96
Laiton	7		Nichrome	100

Application

Trouver la résistance d'un fil de cuivre de 100 m de long et de rayon $r = 1 \text{ mm}$. La résistivité ρ du cuivre est égale à $1,7 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot m$.

Solution

$$R = \frac{\rho l}{S} = \frac{\rho l}{\pi r^2}$$

$$\text{Application numérique : } R = \frac{1,7 \times 10^{-8} \times 100}{\pi \times (10^{-3})^2} = 0,548 \Omega$$

3.2.4. Résistivité en fonction de la température

La résistivité d'un conducteur dépend d'un certain nombre de facteurs dont la température. La résistivité de la plupart des métaux augmente en fonction de la température. Dans un domaine particulier de variation de la température, on exprime $\rho(T)$ la relation :

$$\boxed{\rho(T) = \rho_0 [1 + \alpha(T - T_0)]} \quad [4.9]$$

ρ_0 est la résistivité à une température de référence souvent prise à 20°C et α est le coefficient de dilatation thermique de la résistivité.

Puisque R est proportionnelle à ρ , on peut écrire : $R(T) = R_0 [1 + \alpha(T - T_0)]$

4. Mobilité des porteurs de charges

Dans un métal, les électrons sont quasi-libres et se déplacent entre les ions fixes du réseau cristallin. Ils sont au nombre de n par mètre cube et leur mobilité μ_n s'exprime en $\text{m}^2 \text{s}^{-1} \text{Volt}^{-1}$. Si e désigne la valeur absolue de la charge de l'électron et μ_n la mobilité ($\text{m}^2 \text{s}^{-1} \text{V}^{-1}$) des électrons quasi-libres du métal, la résistivité ρ du métal a pour expression :

$$\rho = \frac{1}{\underbrace{e}_{\substack{\text{Charge} \\ \text{de l'électron}}} \times \underbrace{\mu_n}_{\substack{\text{Mobilité} \\ \text{des électrons} \\ \text{du métal}}} \times \underbrace{n}_{\substack{\text{Nombre d'électrons} \\ \text{par unité de volume}}}} \quad [4.10]$$

La mobilité des électrons μ_n du métal relie la vitesse $\vec{v}$ des électrons quasi-libres au champ électrique $\vec{E}$ dans le métal :

$$\boxed{\vec{v} = \mu_n \vec{E}} \quad [4.11]$$

Exemple : Dans le cas du cuivre, on a :

$$n \cong 8,2 \cdot 10^{28} \text{ électrons m}^{-3}$$

$$\mu_n \cong 0,0047 \text{ m}^2/(\text{s Volt})$$

ce qui donne une conductivité σ (S.m^{-1}) de $6,62 \cdot 10^7 \text{ S.m}^{-1}$.

Dans les semi-conducteurs, deux types de porteurs de charges mobiles sont responsables de la conduction électrique :

- les électrons : de charge $e = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, en nombre n par unité de volume (m^{-3}), et de mobilité μ_n en $\text{m}^2 \text{ s}^{-1} \text{ V}^{-1}$
- les trous : de charge $e = +1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, en nombre p par unité de volume (m^{-3}) et de mobilité μ_p en $\text{m}^2 \text{ s}^{-1} \text{ V}^{-1}$

Dans un semi-conducteur intrinsèque très pur donc non dopé, on a : $n = p$

Un semi-conducteur est dit "dopé" quand de façon contrôlée, on a modifié le nombre d'électrons (dopage N), ou de trous (dopage P).

La résistivité ρ en $\Omega \cdot \text{m}$ d'un semi-conducteur intrinsèque (très pur) est :

$$\rho = \frac{1}{e\mu_n n + e\mu_p p} = \frac{1}{en(\mu_n + \mu_p)}$$

Dans le cas d'un dopage N, on aura un nombre n d'électrons par unité de volume très supérieur au nombre p de trous et la conductivité ($\text{S} \cdot \text{m}^{-1}$) sera : $\sigma_n \approx e\mu_n n$

Dans le cas du dopage P, se sont les trous qui dominent et leur nombre par unité de volume p (m^{-3}) est cette fois très supérieur à n , d'où la conductivité σ ($\text{S} \cdot \text{m}^{-1}$) est égale à $\sigma_p \approx e\mu_p p$

5. Energie électrique et puissance

Soit un circuit constitué d'une pile dont les bornes sont reliées à une résistance (Fig. 3). Soit une quantité dQ de charges positives se déplaçant dans le circuit, à partir du point A que l'on supposera être au potentiel de référence. Ce potentiel est pris égal à zéro. Lorsque dQ se déplace de A vers B en passant par la pile, son énergie potentielle augmente de $(dQ \times V)$ (V est le potentiel au point B).

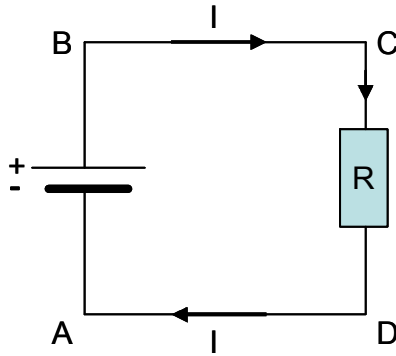


Fig. 3 : une pile établit un courant dans un circuit contenant une résistance

Au fur et à mesure que dQ se déplace de C vers D, elle perd son énergie potentielle électrique par collision avec les atomes de la résistance R en produisant de l'énergie thermique. On suppose qu'entre B et C ainsi qu'entre D et A il n'y a pas de perte d'énergie. Dans un temps dt , l'énergie E transmise à la résistance est :

$$dE = dQ \times V = (I dt) \times V = I \times V \times dt$$

La puissance dissipée est donc :

$$P = \frac{dE}{dt} = V \times I$$

En appliquant la loi d'Ohm, on peut écrire que :

$$V = R \times I$$

et on a :

$$\boxed{P = VI = RI^2} \quad [4.12]$$

Unités : L'énergie E s'exprime en Joule (J) et la puissance s'exprime en Watt (W).

Application

- 1) Une ampoule électrique porte une inscription 220V/75W. Déterminer le courant I qui circule dans le filament de cette lampe et sa résistance R .
- 2) Combien coûte l'éclairage d'une pièce dans laquelle cette ampoule reste allumée pendant 24 heures. Prix de revient 0.11 € / kilowattheure.

Solution

1) Nous avons : $P = VI \rightarrow I = \frac{P}{V} = \frac{75}{220} = 0.34 \text{ A}$

La résistance R vaut : $R = \frac{V}{I} = \frac{220}{0.34} = 647 \Omega$

2) $75 \text{ W} = 0.075 \text{ kW}$

Energie consommée pendant 24 h = $0.075 \times 24 = 1.8 \text{ kW}$

Coût = $0.11 \times 1.8 \approx 0.2 \text{ €}$.

6. Loi de Joule

L'énergie E (Joule) dégagée par un conducteur électrique de résistance $R(\Omega)$ traversé par un courant d'intensité $I(\text{A})$ pendant un temps $t(\text{s})$ est donnée par la relation suivante :

$$\boxed{E = R I^2 t} \quad [4.13]$$

L'énergie dépend donc de 3 facteurs :

- L'intensité du courant (le facteur le plus important puisqu'il est au carré) ;
- Le temps pendant lequel circule le courant ;
- La résistance du conducteur.

Autre démonstration de la loi de Joule

Un électron de charge $-e$ placé dans un champ électrique $\vec{E}$ constant est soumis à la force de Coulomb $\vec{F} = -e\vec{E}$.

Soit $\vec{v}$ la vitesse d'entraînement des électrons, le déplacement élémentaire $d\vec{l}$ est donné par la relation : $d\vec{l} = \vec{v} dt$

Le travail élémentaire de la force de Coulomb est :

$$dW_{eI} = -e \vec{E} \cdot d\vec{l} = -e \vec{E} \cdot \vec{v} dt$$

Comme $\vec{E}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens opposés, on peut écrire :

$$dW_{eI} = e E v dt$$

Pour un cylindre homogène de section S , de longueur l et de densité d'électrons n on a :

$$dW = \underbrace{(nSl)}_{\substack{\text{Nombre} \\ \text{d'électrons}}} e E v dt = \underbrace{(nev)}_J \underbrace{(El)}_{\Delta V} S dt$$

$$\text{Soit : } dW = \Delta V \underbrace{(JS)}_I dt$$

Comme : $\Delta V = RI$, il vient $dW = RI^2 dt$

$$\text{Et par conséquent : } P = \frac{dW}{dt} = RI^2$$

7. Loi d'Ohm généralisée (Loi de Pouillet)

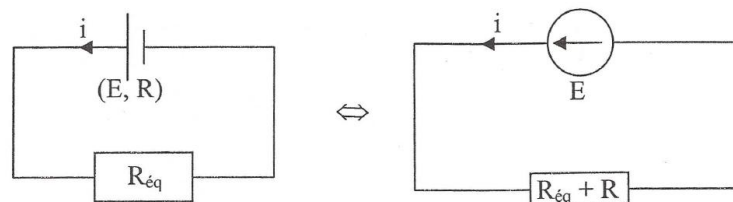


Fig. 4 : Schéma de principe de la loi de Pouillet

L'intensité de courant débité par un générateur de f.e.m E et de résistance interne R , dans un circuit purement ohmique de résistance équivalente R_{eq} est donnée par l'expression :

$$I = \frac{E}{R + R_{eq}} \quad [4.14]$$