



République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Centre universitaire de Rélizane  
Faculté de sciences et Technologie  
Département de Génie Mécanique

---



# Transfert de chaleur et de masse

3<sup>eme</sup> année licence  
Génie des Matériaux  
2017-2018

---

## AVANT PROPOS

Ce polycopié est le support écrit du cours « **Transfert de chaleur et de masse** » de la troisième année licence génie des matériaux filière génie mécanique.

Le cours comporte cinq chapitres , la première permet d'apprendre et d'assimiler les différents modes de transfert de chaleur et les lois qui les gouvernent,

## **PARTIE A: Transfert de chaleur**

### **Chapitre 1. Généralités sur les transferts de chaleur**

Introduction générale .....	01
1-1-Relation entre le transfert de chaleur et la thermodynamique .....	02
1-2-Définitions.....	02
1-2-1Champs de température.....	02
1-2-2 Flux de chaleur.....	02
1-2-3 Densité de flux.....	03
1-2-4 Bilan d'énergie.....	03
1-2-5 Stockage d'énergie.....	03
1-2-6 Génération d'énergie .....	03
1-3 Les différents modes de transfert de chaleur .....	04
1-3-1 La conduction.....	04
1-3-2 La convection.....	05
1-3-3 Le Rayonnement.....	06

### **Chapitre 2. Transferts de chaleur par conduction en régime permanent**

2 -Transferts de chaleur par conduction .....	07
2.1 Equation générale de la conduction.....	07
2.1.1 Les hypothèses simplificatrices .....	08
2.1.2 Formes de l'équation de conduction.....	08
2.1.3 Expressions analytiques de l'équation de la conduction .....	09
2.2 Conduction en régime permanent unidirectionnel et constante.....	10
2.2.1 Mur simple.....	10
2.2.2 Analogie entre le flux thermique et le flux électrique .....	11
2.2.3 Mur simple en contact avec deux fluides.....	13
2.2.4 Mur composite en contact avec deux fluides.....	15
2.2.5 Cylindre creux long (tube) à surface latérale isotherme .....	16
2.2.6 Cylindre creux long en contact avec deux fluides: .....	18
2.2.7 Sphère creuse à surface isotherme .....	20

### **Chapitre 3. Transferts de chaleur par conduction en régime variable**

2.4 Conduction en régime variable (transitoire ou instationnaire).....	23
2.4.1 Corps thermiquement mince .....	24
2.4.2 Corps thermiquement épais .....	26

### **Chapitre 4. Transferts de chaleur par convection**

4.1 Rappels sur l'analyse dimensionnelle.....	27
4.1.1 Dimensions fondamentales .....	27
4.1.2 Principe de la méthode.....	27
4.1.3 Exemple d'application .....	28
4.1.4 Avantages de l'utilisation des grandeurs réduites .....	31
4.2 Convection sans changement d'état .....	32
4.2.1 Généralités.....	32
4.2.2 Expression du flux de chaleur .....	33
4.2.3 Calcul du flux de chaleur en convection forcée .....	35
4.2.4 Calcul du flux de chaleur en convection naturelle .....	41

### **Chapitre 5. Transferts de chaleur par rayonnement**

5.1 Généralités. ....	44
5.1.1 Nature du rayonnement.....	44
5.1.2 Définition.....	45
5.1.2.1 Classification.....	45
5.1.2.2 Définitions relatives aux sources .....	48
5.1.2.3 Définitions relatives à un récepteur.....	47
5.1.2.4 Corps noir, corps gris .....	48

5.2 Lois du rayonnement .....	49
5.2.1 Loi de Lambert.....	49
5.2.2 Lois physiques .....	50
5.2.2.1 Loi de Kirchoff.....	50
5.2.2.2 Rayonnement du corps noir .....	51

# **Transfert de chaleur**

## **Chapitre 1.**

### **Généralités sur les transferts de chaleur**

## **Introduction générale**

De tous temps, les problèmes de transmission d'énergie, et en particulier de la chaleur, ont eu une importance déterminante pour l'étude et le fonctionnement d'appareils tels que les générateurs de vapeur, les fours, les échangeurs, les évaporateurs, les condenseurs, etc., mais aussi pour des opérations de transformations chimiques.

En effet, dans certains systèmes réactionnels, c'est la vitesse des échanges de chaleur et non la vitesse des réactions chimiques qui détermine le coût de l'opération (cas de réactions fortement endo- ou exothermique). En outre, de nos jours, par suite de l'accroissement relatif du prix de revient de l'énergie, on recherche dans tous les cas à obtenir le rendement maximal d'une installation pour une dépense d'énergie minimale [1;2].

Les problèmes de transfert de chaleur sont nombreux, et on peut essayer de les différencier par les buts poursuivis dont les principaux sont : l'augmentation de l'énergie transmise ou absorbée par une surface, l'obtention du meilleur rendement d'une source de chaleur, la réduction ou l'augmentation du passage d'un débit de chaleur d'un milieu à un autre.

Le potentiel qui provoque le transport et le transfert de l'énergie thermique est la température. Si deux points matériels placés dans un milieu thermiquement isolé sont à la même température, on peut affirmer qu'il n'existe aucun échange thermique global entre ces deux points dits en équilibre thermique (il s'agit bien d'un équilibre thermique car chacun des points matériels émet une énergie thermique nette de même module, mais de signe opposé).

Le transfert de chaleur au sein d'une phase ou, plus généralement, entre deux phases, se fait de trois façons :

- a) Par conduction.
- b) Par convection.
- c) Par rayonnement.

Dans de nombreux problèmes de transformation d'énergie thermique, les trois modes de transfert de chaleur coexisteront mais, généralement, au moins une des trois formes pourra être négligée, ce qui simplifiera le traitement mathématique de l'appareil de transfert. Nous pouvons dire dès à présent, qu'aux températures ordinaires, le transport par rayonnement est négligeable, mais il peut devenir notable et prépondérant lorsque le niveau de température augmente.

En outre, signalons que certains transferts thermiques sont accompagnés d'un transfert de matière entre deux phases. Le flux de chaleur transféré en présence d'un changement de phase dépend de la nature et des propriétés physico-chimiques des phases en présence.

C'est le cas de l'ébullition, de la condensation, mais aussi des problèmes d'humidification, de séchage, de cristallisation, etc.

Dans ce qui suit nous allons présenter, pour les trois types de transport de la chaleur, les lois générales qui les gouvernent. Puis nous traiterons, de manière simple, quelques applications où le mode de transport de chaleur étudié est prédominant[1;2]t.

### **1-1-Relation entre le transfert de chaleur et la thermodynamique**

La thermodynamique permet de prévoir la quantité totale d'énergie qu'un système doit échanger avec l'extérieur pour passer d'un état d'équilibre à un autre.

La thermique ou la thermocinétique se propose de décrire quantitativement dans l'espace et dans le temps, l'évolution des grandeurs caractéristiques du système, en particulier la température entre l'état d'équilibre initial et l'état d'équilibre final.

La thermodynamique étudier les états d'équilibres

Le 1<sup>er</sup> principe de la thermodynamique: équivalence entre la chaleur et énergie

1 cal = 4,18 joule, la conservation d'énergie  $Q_{cédée} = Q_{absorbée}$

Le 2<sup>ème</sup> principe de la thermodynamique: admet que la chaleur ou énergie thermique ne peut passer que d'un corps chaud vers un corps froid.

Le transfert thermique : étudier le mécanisme processus et la vitesse du transfert

- Calculer la distribution de la température au sein des corps
- Calculer le flux thermique J/s (W) chaleur échangée par unité de temps

Transfert = échange = transmission = propagation

Thermique = chaleur

Transfert thermique = transfert de chaleur

### **1-2-Définitions:**

#### **1-2-1 Champ de température: [1;2]**

Les transferts d'énergie sont déterminés à partir de l'évolution dans l'espace et dans le temps de la température :  $T = (x,y,z,T)$

La valeur instantanée de la température en tout point de l'espace est un scalaire appelé champ de température. Nous distinguerons deux cas :

- Champ de température indépendant du temps : le régime est dit permanent ou stationnaire.
- Evolution du champ de température avec le temps : le régime est dit variable ou instationnaire.

#### **1-2-2 Flux de chaleur :**

On appelle flux de chaleur la quantité de chaleur transmise sur la surface S par unité de temps

$$\phi = \frac{dQ}{dt} \quad \text{unité} \quad \left(\frac{J}{s}\right) = (W) \quad (1.1)$$

### 1-2-3 Densité de flux:

C'est la quantité de chaleur transmise par unité de temps et par unité d'aire de la surface isotherme est appelée densité de flux de chaleur :

$$q = \frac{\phi}{s} = \frac{1}{s} \frac{dQ}{dt} \quad \left( \frac{W}{m^2} \right) \quad (1.2)$$

Où S est l'aire de la surface (m<sup>2</sup>)

### 1-2-4 Bilan d'énergie

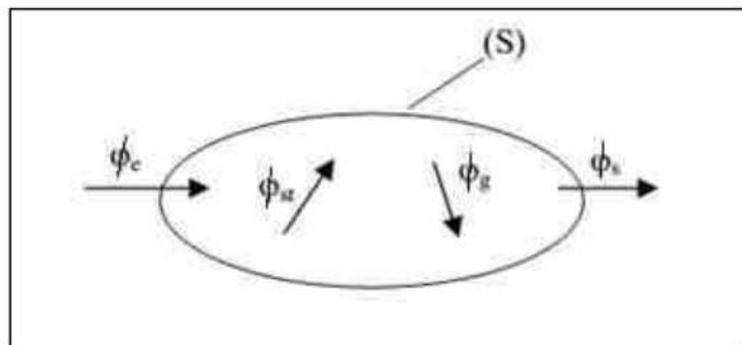
Il faut tout d'abord définir un système (S) par ses limites dans l'espace et il faut ensuite établir l'inventaire des différents flux de chaleur qui influent sur l'état du système et qui peuvent être :

$\phi_{st}$  flux de chaleur stocké

$\phi_g$  flux de chaleur généré

$\phi_e$  flux de chaleur entrant

$\phi_s$  flux de chaleur sortant



On applique alors le 1er principe de la thermodynamique pour établir le bilan d'énergie du système (S) :

$$e + g = st + s$$

### 1-2-5 Stockage d'énergie[1;2]

Le stockage d'énergie dans un corps correspond à une augmentation de son énergie interne au cours du temps (à pression constante) d'où:

$$\phi_{st} = \rho V C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1.3)$$

Avec:  $\phi_{st}$  Flux de chaleur stocké [W]

$\rho$  Masse volumique (kg m<sup>-3</sup>)

V Volume (m<sup>3</sup>)

$C_p$  Chaleur massique (J kg<sup>-1</sup>°C<sup>-1</sup>)

T Température (°C)

t Temps (s)

### 1-2-6 Génération d'énergie

Elle intervient lorsqu'une autre forme d'énergie (chimique, électrique, mécanique, nucléaire) est convertie en énergie thermique. Nous pouvons l'écrire sous la forme :

$$\phi_g = \dot{q}V \quad (W) \quad (1.4)$$

Avec:  $\phi_g$  Flux d'énergie thermique générée (W)  
 $q$  Densité volumique d'énergie générée ( $W\ m^{-3}$ )  
 $V$  Volume ( $m^3$ )

### 1-3 Les différents modes de transfert de chaleur[1;2]

Il existe trois modes de transfert de chaleur: La Conduction, La Convection, Le Rayonnement.

#### 1-3-1 La conduction:

C'est le transfert de chaleur au sein d'un milieu opaques, sans déplacement de matière, sous l'influence d'une différence de température.

La propagation de la chaleur de la conduction à l'intérieur d'un corps s'effectue selon deux mécanismes distincts: Une transmission par les vibrations des atomes ou molécules et une transmission par les électrons libres.

Echange de chaleur entre deux points d'un solide, ou encore d'un fluide immobile et opaque.

#### Loi de Fourier:

La relation fondamentale de la transmission de chaleur par conduction a été proposée par le savant Français J.B.J.Fourier en 1882. La densité de flux de chaleur est proportionnelle au gradient de température.  $\vec{q} = -\lambda \overrightarrow{grad}(T)$

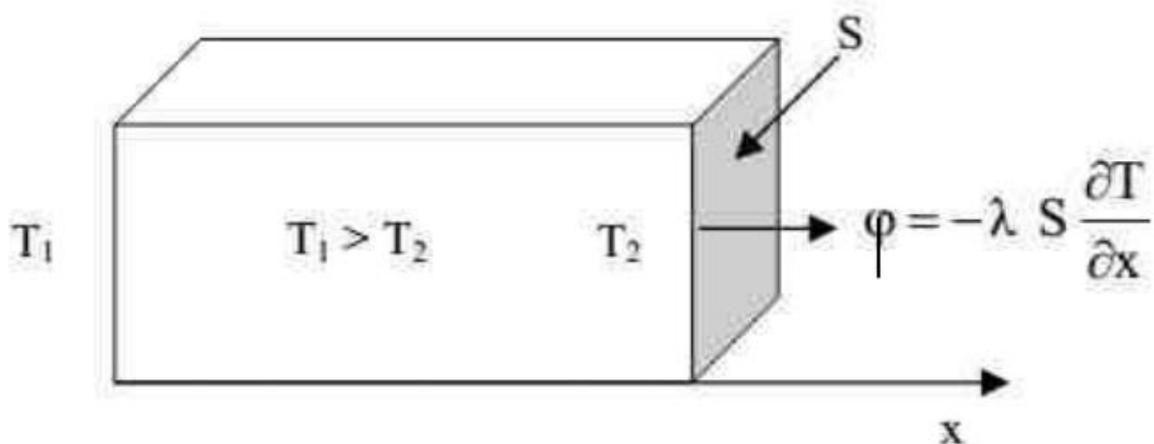
Ou sous forme algébrique  $\phi = -S dT/dx$  (1.5)

$\phi$  : Flux de chaleur par conduction (W)

$\lambda$ : Conductivité thermique du milieu ( $W/m\ ^\circ C$ )

$x$  : variable d'espace dans la direction du flux (m)

$S$  : Aire de la section de passage du flux de chaleur ( $m^2$ )



Varie avec la température le cas des solides

Varie avec la pression le cas des gaz et liquides

On trouvera dans le tableau ci-après les valeurs de la conductivité thermique de certains matériaux parmi les plus courants.

matériaux	Conductivité thermique (W/m °C)	remarques
gaz	0,0006 à 0,18	Mauvais conducteurs
air	0,026	
Liquides non métalliques	0,1 à 1	Conducteurs moyens
cau	0,6	
Solides métalliques	10 à 400	Excellents conducteurs
cuivre	390	
acier	16	
Matériaux non métalliques	0,004 à 4	Conducteurs moyens
verre	1,2	
béton	09,2	
bois	0,23	
Laine de verre	0,04	Mauvais conducteurs (isolants thermiques)
Polystyrène expansé	0,004	

### 1-3-2 La convection: [1;2]

C'est le transfert de chaleur entre un solide et un fluide, l'énergie étant transmise par déplacement du fluide.

Selon la nature du mécanisme qui provoque le mouvement du fluide on distingue:

- La convection libre ou naturelle: le fluide est mise en mouvement sous le seul effet des différences de la masse volumique résultant des différences de températures sur les frontières et d'un champ de force extérieur (le pesanteur).
- La convection forcée: le mouvement du fluide est induit par une cause indépendante des différences de température (pompe, ventilateur).

#### Loi de Newton:

La loi fondamentale de la convection a été proposée par le savant Anglais Isaak Newton en 1701. Le flux de chaleur transmis par convection entre une surface et un fluide peut être évalué par la relation:

$$\phi = hS(T_p - T_\infty) \quad (1.6)$$

$\phi$  : Flux de chaleur transmis par convection (W)

$h$  : coefficient de transmis de chaleur par convection (W/m<sup>2</sup>°C)

$T_\infty$  : Température de fluide loin de la surface solide (°C)

$T_p$ : Température la surface solide (°C)

$S$ : Aire de la surface de contact solide fluide (m<sup>2</sup>)

#### Remarque:

La valeur numérique de  $h$  dans un système, dépend de la forme géométrique de la surface, de la vitesse, et également des propriétés physiques du fluide, et souvent même de la différence de température. En fait, ces quantités ne sont pas nécessairement constantes à la surface, aussi le coefficient d'échange de chaleur par convection peut varier d'un point à un autre.

### 1-3-3 Le Rayonnement: [1;2]

Tout corps opaque ou partiellement opaque porté à une température  $T > 0$  K rayonne de l'énergie de tous les directions cette énergie étant transparente sous formes d'ondes électromagnétiques sa propagation n'exige pas de support matériel ce rayonnement n'est pas chaude pour lui-même mais l'énergie qu'il transporte peut se transformer totalement ou partiellement en chaleur dès qu'il atteint un obstacle opaque ou partiellement opaque.

C'est un transfert d'énergie électromagnétique entre deux surfaces (même dans le vide). Dans les problèmes de conduction, on prend en compte le rayonnement entre un solide et le milieu environnant et dans ce cas nous avons la relation :

$$\Phi = \sigma \epsilon_p S (T_p^4 - T_\infty^4) \quad (1.7)$$

Avec : Flux de chaleur transmis par rayonnement (W)

: Constante de Stephan- Boltzmann ( $5,67 \cdot 10^{-8} \text{W m}^{-2} \text{K}^{-4}$ )

$\epsilon_p$  : Facteur d'émission de la surface

$T_p$  : Température de la surface (K)

$T_\infty$  : Température du milieu environnant la surface (K)

S : Aire de la surface ( $\text{m}^2$ )

#### Loi de Stefan- Boltzmann:

D'après les deux savants Australiens J.Stefan qui en 1879 a établi expérimentalement l'équation:

$$\Phi = \sigma \epsilon_p S T_p^4 \quad (1.8)$$

Puis démontrée théoriquement par L.Boltzmann en 1884 l'examen de cette équation montre que:

La quantité de chaleur transmise par rayonnement à partir d'un corps noir dont la surface est portée à une température supérieur eau zéro absolue est proportionnelle à la quatrième puissance de la température absolue.

## **Chapitre 2.**

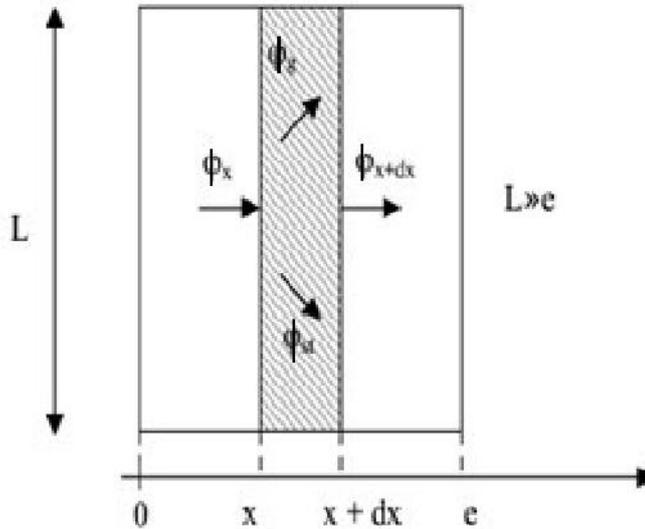
# **Transferts de chaleur par conduction en régime permanent**

## Chapitre 2. Transferts de chaleur par conduction en régime permanent

### 2 -Transferts de chaleur par conduction[1;2]

#### 2.1 Equation générale de la conduction

Dans sa forme monodimensionnelle, elle décrit le transfert de chaleur unidirectionnel au travers d'un mur plan. Considérons un système d'épaisseur  $dx$  dans la direction  $x$  et de section d'aire  $S$  normalement à la direction  $Ox$ . Le bilan d'énergie sur ce système s'écrit :



$$\phi_x + \phi_g = \phi_{x+dx} + \phi_{st}$$

Avec

$$\phi_x = -\lambda S \frac{dT}{dx}$$

$$\phi_g = \dot{q} S dx$$

$$\phi_{x+dx} = -\lambda S \frac{dT}{dx} \Big|_{x+dx}$$

$$\phi_{st} = \rho S dx C_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

En reportant dans le bilan d'énergie et en divisant par  $dx$  nous obtenons

$$\frac{\lambda S \frac{dT}{dx} \Big|_{x+dx} - \lambda S \frac{dT}{dx} \Big|_x}{dx} + \dot{q} S = \rho S C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.1)$$

on a

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

## Chapitre 2. Transferts de chaleur par conduction en régime permanent

et dans le cas tridimensionnel, nous obtenons l'équation de la chaleur dans le cas le plus général :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

### 2.1.1 Les hypothèses simplificatrices[1;2]

Cette équation peut se simplifier dans un certain nombre de cas :

a) Si le milieu est isotrope :  $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_z = \lambda$

b) Si  $\dot{q}$  est constante

L'équation 2.1 devient (coordonnée cartésienne)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\Delta T + \frac{\dot{q}}{\lambda} = \frac{\rho C_p}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\boxed{\Delta T + \frac{\dot{q}}{\lambda} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}}$$

(2.2)

Le rapport

$$a = \frac{\lambda}{\rho C_p}$$

est appelé la diffusivité thermique ( $m^2/s$ )

### 2.1.2 Formes de l'équation de conduction :

pour les cas particuliers l'équation 2.2 devient

- Milieu avec source interne, en régime permanent  $\boxed{\Delta T + \frac{\dot{q}}{\lambda} = 0}$  Equation de Poisson
- Milieu sans source interne, en régime permanent  $\boxed{\Delta T = 0}$  Equation de Laplace
- Milieu sans source interne, en régime variable  $\boxed{\Delta T = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}}$  Equation de Fourier

## Chapitre 2. Transferts de chaleur par conduction en régime permanent

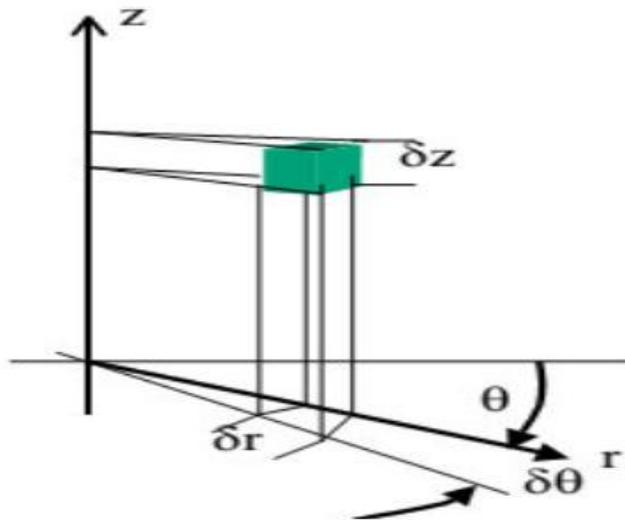
### 2.1.3 Expressions analytiques de l'équation de la conduction : [1;2]

Pour les mêmes hypothèses simplificatrices

a) Coordonnées cartésienne (x,y,z) :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{\dot{q}}{\lambda} = \frac{\rho C_p}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t}$$

b) Coordonnées cylindrique (r,  $\theta$ , z) :

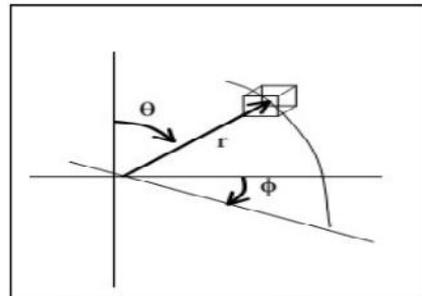


Dans le cas où T ne dépend que de (r et t)  $\leftrightarrow \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\dot{q}}{\lambda} = \frac{\rho C_p}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.3)$$

c) Coordonnées sphérique (r,  $\theta$ ,  $\phi$ ) :

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$



$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} \right) + \frac{\dot{q}}{\lambda} = \frac{\rho C_p}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t}$$

Dans le cas où T ne dépend que de (r et t)  $\leftrightarrow \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{\partial T}{\partial \phi} = 0$

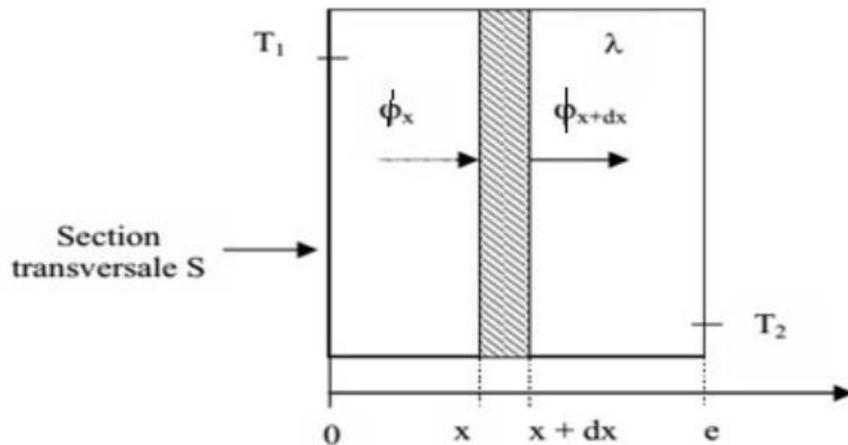
$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\dot{q}}{\lambda} = \frac{\rho C_p}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.4)$$

## Chapitre 2. Transferts de chaleur par conduction en régime permanent

### 2.2 Conduction en régime permanent et unidirectionnel et constante: [1;2]

#### 2.2.1 Mur simple:

On considère un mur d'épaisseur  $e$ , de conductivité thermique  $\lambda$ , et de grandes dimensions transversales dont les faces extrêmes sont à des températures  $T_1$  et  $T_2$  ( $T_1 > T_2$ ), et qu'il n'y a pas de génération ni de stockage d'énergie.



En effectuant un bilan thermique sur le système (S) constitué par la tranche de mur comprise entre les abscisses  $x$  et  $x + dx$  il vient :

L'équation générale de la conduction

$$\Delta T + \frac{\dot{q}}{\lambda} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}$$

Le régime est permanent :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

Pas de source de chaleur

$$\dot{q} = 0$$

C'est l'équation de Laplace

$$\Delta T = 0 \leftrightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \rightarrow \frac{dT}{dx} = A \text{ et } T(x) = Ax + B$$

## Chapitre 2. Transferts de chaleur par conduction en régime permanent

Avec les conditions aux limites:  $T(x = 0) = T_1$  et  $T(x = e) = T_2$

$$T_1 = B \text{ et } T(x = e) = T_2 = Ae + T_1$$

d'où :

$$T(x) = T_1 - (x/e)(T_1 - T_2) \quad (2.5)$$

L'équation (2.5) c'est la distribution de la température (Le profil de température)

La densité de flux de chaleur traversant le mur s'en déduit par la relation :

$$\phi = -\lambda S \frac{dT}{dx}$$

De (2.5) :

$$q = \frac{\phi}{S} = -\lambda \frac{dT}{dx} = \frac{\lambda}{e} (T_1 - T_2)$$

Le flux de chaleur

$$\boxed{\phi = \frac{\lambda S}{e} (T_1 - T_2)} \quad (2.6)$$

La densité de flux

$$\boxed{q = \frac{\lambda}{e} (T_1 - T_2)} \quad (\text{W/m}^2) \quad (2.7)$$

La résistance thermique

### 2.2.2 Analogie entre le flux thermique et le flux électrique

Deux systèmes sont dits être analogiques lorsqu'ils obéissent aux mêmes équations et possèdent aussi des conditions aux limites identiques. Cela signifie que l'équation traduisant un des systèmes peut être transformée, pour exprimer le deuxième système, par simple changement des symboles des différentes variables. Par exemple le flux de chaleur à travers une résistance thermique est analogue à l'intensité de courant dans un circuit électrique à courant continu, car ces deux types d'écoulement obéissent aux mêmes équations.

## Chapitre 2. Transferts de chaleur par conduction en régime permanent

On retient la définition générale de la résistance thermique:

unité	Transfer thermique	↔	Courant électrique	unité
°C,K	Température T		Potentiel V ou U	V
J	Chaleur $\phi$		Charge électrique q	Coulomb
W	Flux thermique $\phi = \frac{dQ}{dt}$		Intensité électrique $I = \frac{dq}{dt}$	A
W/m°C	Conductivité thermique $\lambda$		Conductivité électrique $\gamma$	$\Omega^{-1}m^{-1}$
W/m <sup>2</sup>	Densité de flux. $\vec{q}$		Densité de courant $\vec{j}$	A/m <sup>2</sup>
	$\phi$ constant (régime permanent) $T_1 - T_2 = R_{th}\phi$		I constant (courant continu ) $V_1 - V_2 = RI$	
°C/W	R <sub>th</sub> résistance thermique $R_{th} = \frac{e}{\lambda S}$ conduction $R_{th} = \frac{1}{hS}$ convection		R résistance électrique $R_{th} = \frac{l}{\gamma S}$	$\Omega$

Les analogies établies ci-dessus, montrent que les lois d'associations des résistances thermiques sont les mêmes que celles des résistances électriques.

$$R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{\phi_{th}} \quad (2.9)$$

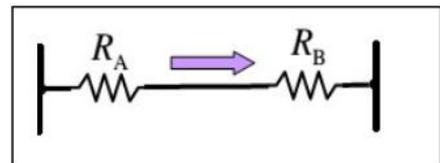
L'analogie électrique est très dans les études des phénomènes ou intervenant des combinaisons des résistances. On y applique souvent les lois des circuits en série et en parallèles.

### La résistance équivalente en série

La résistance équivalente d'un ensemble de résisteurs branchés en série est égale à la somme des résistances des résisteurs en série :

$$R_{eq} = \sum_i R_i$$

Résistance équivalente en série:  $R_{eq} = R_A + R_B$  (2.10)



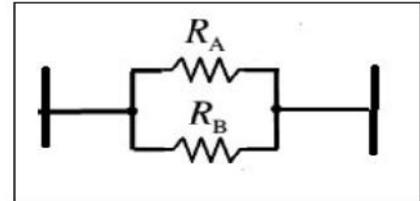
## Chapitre 2. Transferts de chaleur par conduction en régime permanent

### La résistance équivalente en parallèle

La résistance équivalente d'un ensemble de résisteurs branchés en parallèle est égale à l'inverse de l'addition des résistances des résisteurs en parallèle :

$$R_{eq} = \left[ \sum_i \frac{1}{R_i} \right]^{-1}$$

Résistance équivalente en parallèle:  $\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B}$  (2.11)



### 2.2.3 Mur simple en contact avec deux fluides: [1;2]

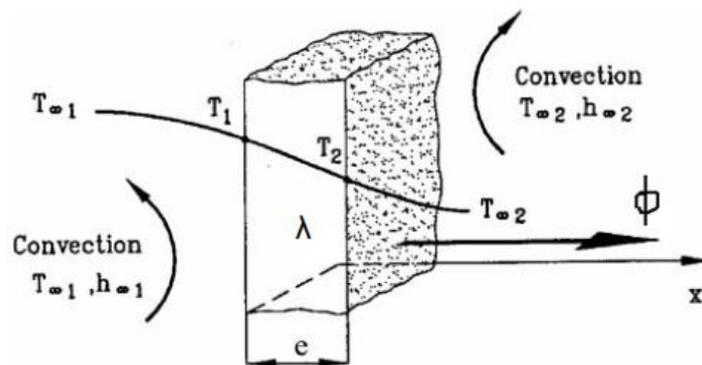
Hypothèses :

⇒ Régime permanent

⇒ Pas de flux de rayonnement

⇒ Pas de génération de chaleur

D'après les hypothèses ⇒  $\phi$  est constante



$$\phi_{\text{convection } 1} = \phi_{\text{conduction}} = \phi_{\text{convection } 2} \quad (2.12)$$

## Chapitre 2. Transferts de chaleur par conduction en régime permanent

$$\begin{aligned}\phi_{\text{convection } 1} &= h_1 S (T_{\infty 1} - T_1) = \frac{(T_{\infty 1} - T_1)}{\frac{1}{h_1 S}} = \frac{(T_{\infty 1} - T_1)}{R_{th \text{ conv } 1}} \\ \phi_{\text{conduction}} &= \frac{\lambda S}{e} (T_1 - T_2) = \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{e}{\lambda S}} = \frac{(T_1 - T_2)}{R_{th \text{ cond}}} \\ \phi_{\text{convection } 2} &= h_2 S (T_2 - T_{\infty 2}) = \frac{(T_2 - T_{\infty 2})}{\frac{1}{h_2 S}} = \frac{(T_2 - T_{\infty 2})}{R_{th \text{ conv } 2}}\end{aligned}$$

$$(2.11) \Rightarrow \frac{(T_{\infty 1} - T_1)}{\frac{1}{h_1 S}} = \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{e}{\lambda S}} = \frac{(T_2 - T_{\infty 2})}{\frac{1}{h_2 S}} \Rightarrow \frac{(T_{\infty 1} - T_1)}{R_{th \text{ conv } 1}} = \frac{(T_1 - T_2)}{R_{th \text{ cond}}} = \frac{(T_2 - T_{\infty 2})}{R_{th \text{ conv } 2}}$$

$$\text{On a } \boxed{X = \frac{A}{B} = \frac{C}{D} = \frac{E}{F} = \frac{G}{H} \Rightarrow X = \frac{A+C+E+G}{B+D+F+H}} \quad (2.13)$$

On utilisé cette relation :

$$\phi = \phi_{\text{convection } 1} = \phi_{\text{conduction}} = \phi_{\text{convection } 2}$$

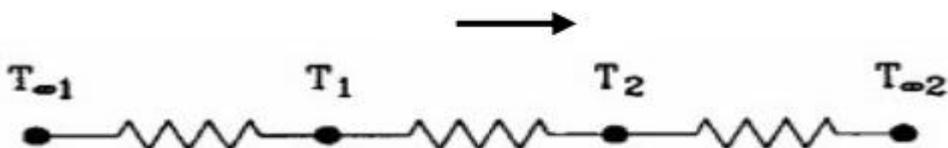
$$\begin{aligned}\phi &= \phi_{\text{convection } 1} = \phi_{\text{conduction}} = \phi_{\text{convection } 2} \\ (2.12) \quad \Rightarrow \phi &= \frac{(T_{\infty 1} - T_1)}{R_{th \text{ conv } 1}} = \frac{(T_1 - T_2)}{R_{th \text{ cond}}} = \frac{(T_2 - T_{\infty 2})}{R_{th \text{ conv } 2}} \\ &= \frac{(T_{\infty 1} - T_1) + (T_1 - T_2) + (T_2 - T_{\infty 2})}{R_{th \text{ conv } 1} + R_{th \text{ cond}} + R_{th \text{ conv } 2}}\end{aligned}$$

$$\boxed{\phi = \frac{(T_{\infty 1} - T_{\infty 2})}{R_{th \text{ conv } 1} + R_{th \text{ cond}} + R_{th \text{ conv } 2}} = \frac{(T_{\infty 1} - T_{\infty 2})}{R_{equ}}} \quad (2.14)$$

$$\boxed{R_{th \text{ equ}} = R_{th \text{ conv } 1} + R_{th \text{ cond}} + R_{th \text{ conv } 2}}$$

$$\boxed{R_{th \text{ equ}} = \frac{1}{h_1 S} + \frac{e}{\lambda S} + \frac{1}{h_2 S}} \quad (2.15)$$

Le schéma électrique équivalent est le suivant :



Pour le profil de la température pour le point  $x$  de l'épaisseur ( $e$ ) on a : le flux de chaleur est

## Chapitre 2. Transferts de chaleur par conduction en régime permanent

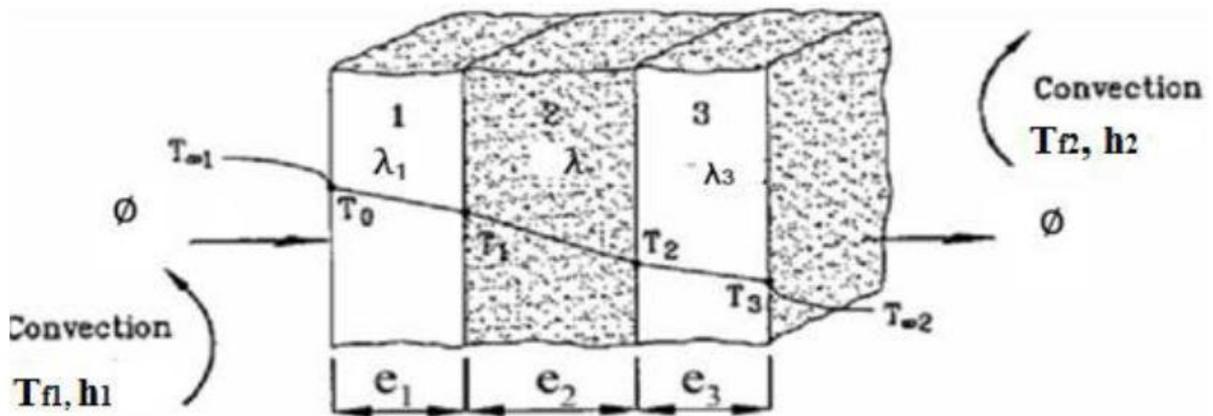
constante pour chaque point

$$\phi = \frac{(T_{\infty 1} - T_{\infty 2})}{R_{th\,equ}} = \frac{(T_{\infty 1} - T(x))}{R_{th\,conv\,1} + R_{th\,cond}(x)} = \frac{(T_{\infty 1} - T(x))}{\frac{1}{h_1 S} + \frac{x}{\lambda S}}$$

$$\Rightarrow T(x) = T_{\infty 1} - \frac{R_{th\,conv\,1} + R_{th\,cond}(x)}{R_{th\,equ}} (T_{\infty 1} - T_{\infty 2})$$

Ou  $R_{th\,cond}(x) = \frac{x}{\lambda S}$

### 2.2.4 Mur composite en contact avec deux fluides:



C'est le cas des murs réels constitués de plusieurs couches de matériaux différents et où l'on ne connaît que les températures  $T_{f1}$  et  $T_{f2}$  des fluides en contact avec les deux faces du mur de surface latérale  $S$ . Pour les mêmes hypothèses on a le flux est constante:

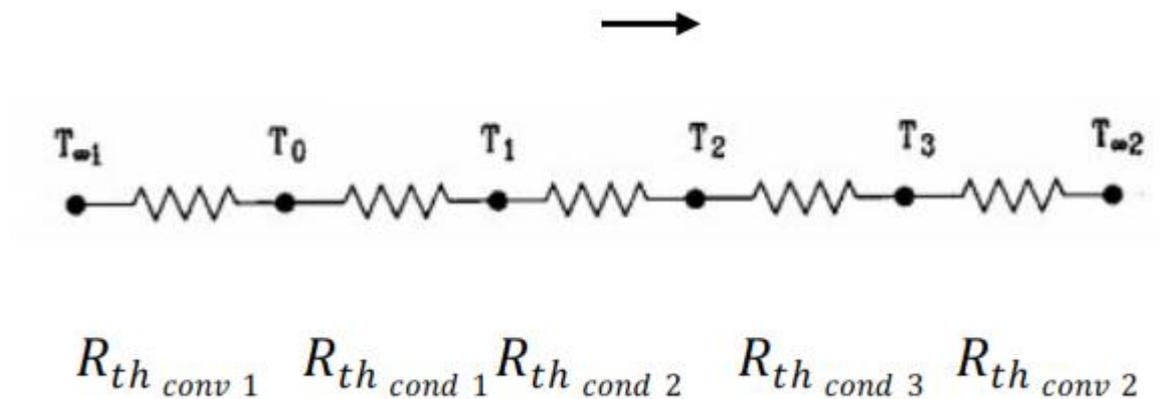
## Chapitre 2. Transferts de chaleur par conduction en régime permanent

$$\phi_{conv 1} = \phi_{cnd 1} = \phi_{cnd 2} = \phi_{cnd 3} = \dots = \phi_{cnd N} = \phi_{conv 2}$$

$$\phi = \frac{(T_{f1} - T_{f2})}{R_{th equ}}$$

$$R_{th equ} = \frac{1}{h_1 S} + \frac{e_1}{\lambda_1 S} + \frac{e_2}{\lambda_2 S} + \frac{e_3}{\lambda_3 S} + \dots + \frac{e_N}{\lambda_N S} + \frac{1}{h_2 S}$$

Le schéma électrique équivalent est le suivant :



Pour un mur de N couches :

$$R_{th equ} = \frac{1}{h_1 S} + \frac{1}{S} \sum_i^N \frac{e_i}{\lambda_i} + \frac{1}{h_2 S} \quad (2.16)$$

### 2.2.5 Cylindre creuse long (tube) à surface latérale isotherme

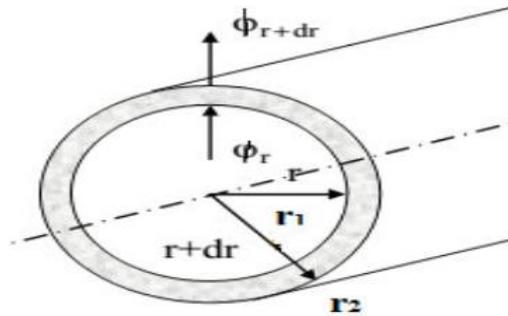
On considère un cylindre creux de conductivité thermique  $\lambda$ , de rayon intérieur  $r_1$ , de rayon extérieur  $r_2$ , de longueur  $L$ , les températures des faces internes et externes étant respectivement  $T_1$ ,  $T_2$  et que  $T_1 > T_2$ . On suppose que le gradient longitudinal de température est négligeable devant le gradient radial.

$T = T(r)$  (car indépendant de  $\theta$  et de  $z$ )

## Chapitre 2. Transferts de chaleur par conduction en régime permanent

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0$$

Effectuons le bilan thermique du système constitué par la partie de cylindre comprise entre les rayons  $r$  et  $r + dr$  :



L'expression analytique de l'équation de la conduction pour les coordonnées cylindrique c'est l'équation (2.3):

Cas stationnaire sans production de chaleur

$$\boxed{\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\dot{q}}{\lambda} = \frac{\rho C_p}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t}} \quad (2.17)$$

En intégrant

Avec les conditions aux limites:

## Chapitre 2. Transferts de chaleur par conduction en régime permanent

$$\Rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0 \Rightarrow r \frac{\partial T}{\partial r} = C \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{C}{r}$$

En intégrant  $T(r) = C \ln r + B$

Avec les conditions aux limites:

$$r = r_1 \Rightarrow T = T_1 = C \ln r_1 + B$$

$$r = r_2 \Rightarrow T = T_2 = C \ln r_2 + B$$

$$\Rightarrow C = \frac{T_1 - T_2}{\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)} \quad \text{et} \quad B = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)} \ln r_1$$

$$\Rightarrow T(r) = T_1 + \frac{T_1 - T_2}{\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)} \ln \frac{r}{r_1}$$

(2.18)

Le profile de la température est logarithmique

La densité de flux de chaleur:

$$q = \frac{\emptyset}{S} = -\lambda \frac{dT}{dr} = -\lambda \frac{(T_1 - T_2) 1}{\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right) r}$$

(2.19)

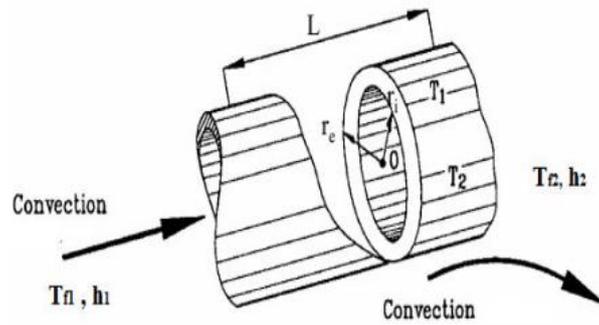
Le flux de chaleur :

La résistance thermique pour le cas cylindrique:

### 2.2.6 Cylindre creuse long en contact avec deux fluides:

C'est le cas pratique d'un tube recouvert d'une ou plusieurs couches de matériaux différents et où le ne connaît que les températures  $T_{f1}$  et  $T_{f2}$  des fluides en contact avec les faces interne et externe

## Chapitre 2. Transferts de chaleur par conduction en régime permanent



du cylindre ;  $h_1$  et  $h_2$  sont les coefficients de transfert de chaleur par convection entre les fluides et les faces internes et externes :

$$\Phi = \Phi_{\text{conv } 1} = \Phi_{\text{cnd}} = \Phi_{\text{conv } 2}$$

$$\Phi_{\text{conv } 1} = h_1 S_1 (T_{f1} - T_1) = 2\pi r_1 L h_1 (T_{f1} - T_1) = \frac{(T_{f1} - T_1)}{\frac{1}{2\pi r_1 L h_1}} = \frac{(T_{f1} - T_1)}{R_{thcv1}}$$

$$\Rightarrow R_{thcv1} = \frac{1}{2\pi r_1 L h_1}$$

$$\Phi_{\text{cnd } 1} = 2\pi \lambda L \frac{(T_1 - T_2)}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} = \frac{(T_1 - T_2)}{R_{thcod}} \Rightarrow R_{thcod} = \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi \lambda L}$$

Le régime est permanent, pas de source de chaleur

## Chapitre 2. Transferts de chaleur par conduction en régime permanent

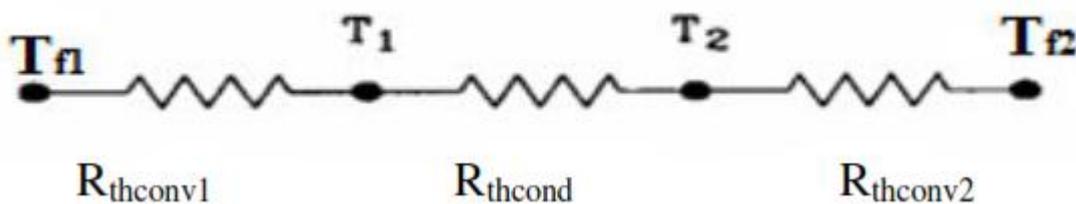
$$\begin{aligned} \phi_{\text{conv } 2} &= h_2 S_2 (T_2 - T_{f2}) = 2\pi r_2 L h_2 (T_2 - T_{f2}) = \frac{(T_2 - T_{f2})}{\frac{1}{2\pi r_2 L h_2}} = \frac{(T_2 - T_{f2})}{R_{thcv2}} \\ \Rightarrow R_{thcv2} &= \frac{1}{2\pi r_2 L h_2} \end{aligned}$$

$$\phi = \phi_{\text{conv } 1} = \phi_{\text{cnd}} = \phi_{\text{conv } 2} \Rightarrow \frac{(T_{f1} - T_1)}{\frac{1}{2\pi r_1 L h_1}} = \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi \lambda L}} = \frac{(T_2 - T_{f2})}{\frac{1}{2\pi r_2 L h_2}}$$

$$\boxed{\phi = \frac{(T_{f1} - T_{f2})}{\frac{1}{2\pi r_1 L h_1} + \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi \lambda L} + \frac{1}{2\pi r_2 L h_2}} = \frac{(T_{f1} - T_{f2})}{R_{thcv1} + R_{thcod} + R_{thcv2}} = \frac{(T_{f1} - T_{f2})}{R_{thequ}}} \quad (2.20)$$

$$R_{thequ} = R_{thcv1} + R_{thcod} + R_{thcv2}$$

Le schéma électrique équivalent



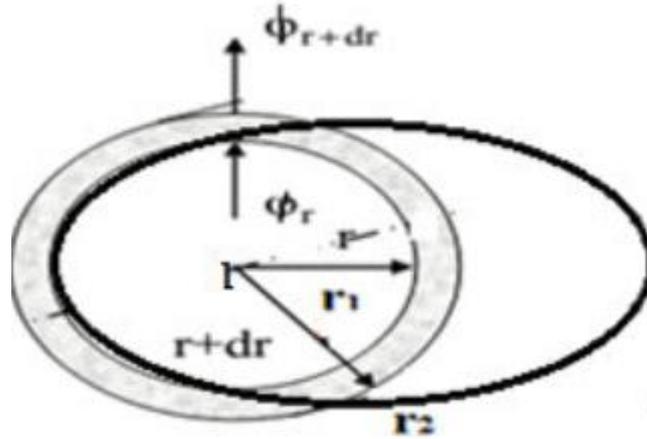
Pour des cylindres concentriques :

$$\boxed{\phi = \frac{(T_{f1} - T_{f2}) 2\pi L}{\frac{1}{h_1 r_1} + \sum_{i=1}^N \frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{r_{i+1}}{r_i} + \frac{1}{h_2 r_2}}} \quad (2.21)$$

### 2.2.7 Sphère creuse à surface isotherme

On considère un sphère creuse de conductivité thermique  $\lambda$ , de rayon intérieur  $r_1$ , de rayon extérieur  $r_2$ , les températures des faces internes et externes étant respectivement  $T_1$ ,  $T_2$  et  $T_{f1}$ ,  $T_{f2}$  et  $T_{f2}$  et  $T_{f1}$  que  $T_1 > T_2$  On suppose que  $T = T(r)$  (car indépendant de  $\theta$  et de  $\phi$ )  $\Rightarrow$

## Chapitre 2. Transferts de chaleur par conduction en régime permanent



L'expression analytique de l'équation de la conduction pour les coordonnées cylindrique c'est l'équation (2.4)

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} \right) + \frac{\dot{q}}{\lambda} = \frac{\rho C_p}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t}$$

Cas stationnaire sans production de chaleur

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) &= 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0 \Rightarrow \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) = A \\ \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial r} &= \frac{A}{r^2} \Rightarrow T(r) = -\frac{A}{r} + B \end{aligned}$$

Avec les conditions aux limites:

$$r = r_1 \Rightarrow T = T_1 = -\frac{A}{r_1} + B$$

$$r = r_2 \Rightarrow T = T_2 = -\frac{A}{r_2} + B$$

$$T_1 - T_2 = A \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

$$\Rightarrow A = \left( \frac{r_2 r_1}{r_1 - r_2} \right) (T_1 - T_2) \text{ et } B = \frac{r_1 T_1 - r_2 T_2}{r_1 - r_2}$$

$$\Rightarrow T(r) = T_1 + \frac{\left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right)}{\left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)} (T_1 - T_2)$$

## Chapitre 2. Transferts de chaleur par conduction en régime permanent

La densité de flux de chaleur:

$$q = \frac{\Phi}{S} = -\lambda \frac{dT}{dr} = \lambda \frac{(T_1 - T_2)}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)} \frac{1}{r^2}$$

La surface d'échange de la sphère:

$$S(r) = 4\pi r^2$$

La résistance thermique pour le cas sphérique:

$$\Phi = qS\lambda \frac{(T_1 - T_2)}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)} \frac{1}{r^2} (4\pi r^2) = 4\pi\lambda \frac{(T_1 - T_2)}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}$$

$$\boxed{\Phi = 4\pi\lambda \frac{(T_1 - T_2)}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}}$$

$$\Phi = 4\pi\lambda \frac{(T_1 - T_2)}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)} = \frac{(T_1 - T_2)}{R_{th}}$$

## **Chapitre 3.**

# **Transferts de chaleur par conduction en régime variable**

### chapitre 3. Conduction en régime variable

#### 3.4 Conduction en régime variable (transitoire ou instationnaire) [2,3]:

Pour faire cette étude on considère généralement deux cas selon le comportement thermique

- Corps thermiquement mince: un corps est dit thermiquement mince si sa résistance interne

$R_i = \frac{l}{\lambda S}$  est négligeable. Dans ce cas sa température peut être considéré uniforme en chaque instant t

- Corps thermiquement épais: un corps est dit thermiquement épais si sa résistance interne

$R_i = \frac{l}{\lambda S}$  n'est pas négligeable. Dans ce cas sa température variée d'un point à un autre en chaque instant t

$$T = T(x, y, z, t)$$

Le critère de classification est le nombre de " Biot"[2,3]

#### Classification thermique des corps (critère de " Biot")

$$Bi = \frac{hl}{\lambda} = \frac{\frac{l}{\lambda S}}{\frac{1}{hS}} = \frac{R_i}{R_e} = \frac{\text{résistance conduction}}{\text{résistance convection}} \quad (3.1)$$

C'est un nombre sans dimension (adimensionnel)

l: longueur caractéristique  $l = V/S$

V: volume du corps

S: surface extérieur d'échange

- Mur d'épaisseur 2 échange de la chaleur par ces deux faces

$$l = \frac{V}{S} = \frac{\gamma^2 \gamma}{2\gamma} = \frac{\gamma}{2}$$

- Mur d'épaisseur 2 échange de la chaleur par seul faces

$$l = \frac{V}{S} = \frac{\gamma^2 \gamma}{\gamma} = \gamma$$

### chapitre 3. Conduction en régime variable

- cylindre de rayon R

$$l = \frac{V}{S} = \frac{\pi R^2 H}{\pi R H} = \frac{R}{2}$$

- Sphère de rayon R

$$l = \frac{V}{S} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{4\pi R^2} = \frac{R}{3}$$

- Cube

$$l = \frac{V}{S} = \frac{a^3}{6a^2} = \frac{a}{6}$$

$B_i \leq 0,1$  corps mince

$B_i > 0,1$  corps épais

#### 3.4.1 Corps thermiquement mince[2,3]

Le plongement d'un solide chaud dans un liquide froid, on plonge un solide probablement chauffé à la température initiale  $T_i$  dans un fluide à la température  $T_f = T_\infty$

#### Bilan thermique

La Chaleur cédée par le corps = la chaleur absorbée par le fluide entre  $t$  et  $t+dt$

La quantité de chaleur transmise au fluide par convection dans le temps  $dt$  = à la diminution de l'énergie interne dans le solide

$$\phi = \frac{dQ}{dt} = -\dot{m}c_p \frac{dT}{dt} = -\rho c_p V \frac{dT}{dt} \quad \text{et} \quad \phi = hS(T - T_f) \quad (3.2)$$

$C_p$  = constant c'est un solide

Avec les conditions aux limites

### chapitre 3. Conduction en régime variable

$$t = 0, \quad T = T_i$$

$$-\rho C_p V \frac{dT}{dt} = hS(T - T_f)$$

$$\text{on pose } \hat{T} = T - T_f \Rightarrow dT = d\hat{T}$$

$$-\rho C_p V \frac{d\hat{T}}{dt} = hS\hat{T} \Rightarrow -\rho C_p V \frac{d\hat{T}}{\hat{T}} = hS dt$$

$$\ln \hat{T} = -\frac{hS}{\rho C_p V} t + C$$

$$t = 0, \quad T = T_i \Rightarrow \hat{T} = T_i - T_f = \hat{T}_i$$

$$\Rightarrow C = \ln \hat{T}_i$$

$$\ln \hat{T} = -\frac{hS}{\rho C_p V} t + \ln \hat{T}_i \Rightarrow \ln \frac{\hat{T}}{\hat{T}_i} = -\frac{hS}{\rho C_p V} t$$

$$\Rightarrow \frac{\hat{T}}{\hat{T}_i} = e^{-\frac{hS}{\rho C_p V} t} \Rightarrow \boxed{\frac{T - T_f}{T_i - T_f} = e^{-\frac{hS}{\rho C_p V} t}}$$

$$\text{Le flux: } \phi = hS(T - T_f)$$

$$\Rightarrow \boxed{\phi = hS(T_i - T_f) = e^{-\frac{hS}{\rho C_p V} t}}$$

(3.3)

**Nombre de Fourier:**

$$F_0 = \frac{\lambda t}{\rho C_p l^2}$$

$$a = \frac{\lambda}{\rho C_p} \Rightarrow F_0 = \frac{at}{l^2}$$

a: diffusivité thermique du matériau

$$\frac{T - T_f}{T_i - T_f} = e^{-\frac{hS}{\rho C_p V} t} = e^{-\frac{ht}{\rho C_p l}} = e^{-\frac{htl}{\rho C_p l^2}} = e^{-\left(\frac{hl}{\lambda} \frac{\lambda}{\rho C_p l^2} t\right)}$$

$$\boxed{\frac{T - T_f}{T_i - T_f} = e^{(-B_i F_i)}}$$

(3.4)

### chapitre 3. Conduction en régime variable

#### 3.4.2 Corps thermiquement épais $B \ll \delta$ [2,3]

Supposant que le problème de transfert de chaleur permet de négliger le flux de chaleur dans les directions  $y$  et  $z$  et de plus que  $\lambda$  est constante

L'équation de la chaleur devient :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.5)$$

Cherchons un produit solution de type

$$T(x, t) = X(x)G(t)$$

L'équation précédente devient

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{a} \frac{1}{G} \frac{dG}{dt} = -\omega^2$$

Ainsi

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \omega^2 X = 0 \text{ et } \frac{dG}{dt} + a\omega^2 G = 0$$

Avec  $\omega$  comme constante de séparation des variables.

La solution pour  $X$  est

$$X = C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x)$$

et pour  $G$

$$G = \exp(-\omega^2 a t)$$

Donc la solution générale est :

$$T(x, t) = [C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x)] C_3 \exp(-\omega^2 a t)$$

(3.6)

## **Chapitre 4.**

# **Transferts de chaleur par convection**

## Chapitre 4. Transfert de chaleur par convection

### 4 Transfert de chaleur par convection

#### 4.1 Rappels sur l'analyse dimensionnelle

##### 4.1.1 Dimensions fondamentales

On peut exprimer les grandeurs physiques en fonction d'un nombre limité de dimensions fondamentales. Exemples : Vitesse :  $L \cdot T^{-1}$  ; viscosité dynamique :  $M \cdot L^{-1} \cdot T^{-1}$  ; force :  $M \cdot L \cdot T^{-2}$

Sur ces exemples on voit que le nombre de dimensions fondamentales est de 3 : Masse M, Longueur L, Temps T.

Ces trois dimensions fondamentales ne sont pas toujours suffisantes. Pour les problèmes de transfert de chaleur, il est nécessaire d'ajouter une 4<sup>ème</sup> dimension : la température et, lorsque l'échange d'énergie entre grandeurs mécaniques et grandeurs thermiques ne sera pas mesurable, on ajoutera la quantité de chaleur Q qui sera considérée comme une 5<sup>ème</sup> dimension.

Remarque : Q, homogène à un travail qui s'exprime en fonction des dimensions fondamentales M, L et T par

$Q = M \cdot L \cdot T^{-2}$  n'est pas une vraie dimension fondamentale.

La méthode d'analyse dimensionnelle, qui repose sur le principe de l'homogénéité dimensionnelle des termes d'une équation, est connue sous le nom de théorème de Vaschy-Buckingham ou théorème des groupements [3,4].

##### 4.1.2 Principe de la méthode

Si l'on peut représenter mathématiquement une loi physique en exprimant une variable physique  $G_1$  en fonction d'un certain nombre d'autres variables physiques indépendantes  $G_2, \dots, G_n$ , c'est à dire si  $G_1 = f(G_2, G_3, \dots, G_n)$  ou encore  $f(G_1, G_2, \dots, G_n) = 0$ , le problème peut être simplifié de la manière suivante :

- On écrit pour chaque variable  $G_i$ , l'équation dimension en fonction des dimensions fondamentales. On dispose alors de n équations qui ont nécessité p dimensions fondamentales pour caractériser toutes les grandeurs physiques.

- On prélève p de ces n équations que l'on considère comme équations de base. Bien que le choix des équations prélevées soit arbitraire, il faut toutefois que chaque dimension fondamentale apparaisse au moins une fois sur l'ensemble des p équations.

- Les (n-p) équations restantes se présentent alors sous forme de (n-p) rapports sans dimensions appelés groupements qui sont des "grandeurs réduites". On obtient alors une équation réduite :

$$g(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-p}) = 0$$

Un groupement est le rapport d'une équation dimension d'une grandeur physique n'appartenant pas à l'ensemble des équations de base au produit des équations de base, chacune d'elle étant portée à une certaine puissance[3,4] :

## Chapitre 4. Transfert de chaleur par convection

$$\pi_i = \frac{[G_i]}{[G_1]^{a_i} [G_2]^{b_i} \dots [G_p]^{e_i}}$$

Pour chaque dimension fondamentale M, L, T, , Q figurant au dénominateur, on fait la somme des exposants que l'on identifie avec l'exposant de la même dimension figurant dans l'équation dimension de la grandeur physique du numérateur. On obtient ainsi un système linéaire de p équations dont la résolution permet de déterminer les p exposants des équations de base du dénominateur.

Il suffit alors d'écrire le rapport en fonction des grandeurs physiques attachées aux équations dimensions de départ.

### 4.1.3 Exemple d'application

Considérons un fluide en circulation forcée dans une canalisation cylindrique pour lequel on se propose de déterminer le coefficient de convection h relatif au transfert de chaleur fluide-paroi qui correspond à une convection forcée [3,4]:

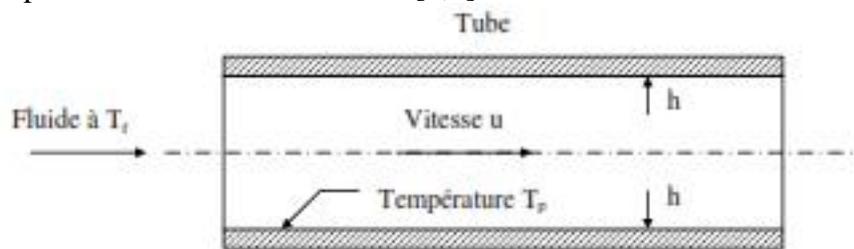


Figure 4.1 : Schéma de la configuration étudiée

#### Détermination des grandeurs physiques :

Il faut déterminer tous les paramètres dont dépend la densité de flux de chaleur (liée à h Q), ce sont ici :

- Les caractéristiques du fluide :
  - coefficient de conductibilité thermique
  - $c_p$  chaleur massique
  - masse volumique
  - $\mu$  viscosité dynamique
- Les caractéristiques de l'écoulement
  - u vitesse moyenne du fluide
- La géométrie de la surface d'échange
  - D diamètre de la conduite
- L'écart de température paroi-fluide

d'où :  $f(\lambda, c_p, \rho, \mu, u, D, \Delta T, \phi) = 0$

#### Equation dimension de chaque grandeur :

Il faut ensuite écrire l'équation aux dimensions fondamentales M, L, T, , Q de chacune des grandeurs, ce qui s'écrit ici :

$Q$  :  $Q \cdot T^{-1} \cdot L^{-1} \cdot -1$   
 $c_p$  :  $Q \cdot M^{-1} \cdot -1$   
 $\rho$  :  $M \cdot L^{-3}$

## Chapitre 4. Transfert de chaleur par convection

$$\mu : M.T^{-1}.L^{-1}$$

$$u : L.T^{-1}$$

$$D : L$$

$$: Q.T^{-1}.L^{-2}$$

Détermination des groupements :

Il faut maintenant choisir 5 équations de base ( Toutes les dimensions fondamentales ont été utilisées) de façon à ce que les 5 dimensions fondamentales figurent au moins une fois dans l'ensemble des équations.

Prenons par exemple :  $\phi$ ,  $\lambda$ ,  $\rho$ ,  $u$ ,  $D$ ,  $T$ , il reste  $\theta$ ,  $c_p$  et  $\mu$ .

On écrit alors les 3 rapports sans dimension correspondants à ces variables sous la forme :

$$\pi_1 = \frac{\phi}{T^{a_1} \lambda^{b_1} \rho^{c_1} D^{d_1} u^{e_1}} ; \pi_2 = \frac{c_p}{T^{a_2} \lambda^{b_2} \rho^{c_2} D^{d_2} u^{e_2}} ; \pi_3 = \frac{\mu}{T^{a_3} \lambda^{b_3} \rho^{c_3} D^{d_3} u^{e_3}}$$

Pour chaque rapport, on remplace les grandeurs physiques par leurs équations dimensions ce qui donne par exemple pour  $\pi_1$  :

$$[\pi_1] = \frac{Q T^{-1} L^{-2}}{\theta^{a_1} (Q T^{-1} L^{-1} \theta^{-1})^{b_1} (M L^{-3})^{c_1} L^{d_1} (L T^{-1})^{e_1}}$$

Pour chaque dimension fondamentale, on identifie les exposants de puissance entre numérateur et dénominateur relatifs à une même dimension ce qui conduit au système [3,4]:

$$\begin{aligned} (Q) : & \quad 1 = b_1 \\ (T) : & \quad -1 = -b_1 - c_1 \\ (L) : & \quad -2 = -b_1 - 3c_1 + d_1 + e_1 \\ (\theta) : & \quad 0 = a_1 - b_1 \\ (M) : & \quad 0 = c_1 \end{aligned}$$

Le rapport  $\pi_1$  s'écrit donc

$$\pi_1 = \frac{\phi D}{\Delta T \lambda}$$

## Chapitre 4. Transfert de chaleur par convection

Ce qui avec  $h$  peut encore s'écrire :

$$\pi_1 = \frac{h D}{\lambda}$$

On obtient de la même manière :

$$\pi_2 = \frac{\rho u D c_p}{\lambda} \quad \text{et} \quad \pi_3 = \frac{\mu}{\rho D u}$$

Le théorème de Vaschy-Buckingham nous permet d'affirmer que la relation :

$$f(\lambda, c_p, \rho, \mu, u, D, \Delta T, \phi) = 0$$

entre 8 variables peut s'exprimer à l'aide des trois nombres sans dimension 1, 2 et 3 sous la forme :

$$f(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = 0 \quad \text{ou} \quad \pi_1 = f(\pi_2, \pi_3).$$

Signification physique de ces groupements :

$$\pi_1 = \frac{h D}{\lambda}$$

est le nombre de Nusselt, il peut aussi s'écrire

$$Nu = \frac{D}{\frac{\lambda}{h}}$$

C'est donc le rapport de la résistance thermique de conduction par la résistance thermique de convection. Il est d'autant plus élevé que la convection est prédominante sur la conduction. Il caractérise le type de transfert de chaleur.

$$\pi_3 = \frac{\mu}{\rho D u} = \frac{1}{Re}$$

c'est l'inverse du nombre de Reynolds qui caractérise le régime d'écoulement dans la canalisation.

$$\pi_2 = \frac{\rho u D c_p}{\lambda}$$

c'est le nombre de Peclet On peut aussi l'écrire :

## Chapitre 4. Transfert de chaleur par convection

$$Pe = \frac{\rho u D}{\mu} \cdot \frac{c_p \mu}{\lambda}$$

et faire apparaître un nouveau nombre adimensionnel :

$$Pr = \frac{c_p \mu}{\lambda}$$

appelé nombre de Prandtl. Ce nombre est calculable pour un fluide donné indépendamment des conditions expérimentales (il ne dépend que de la température) et caractérise l'influence de la nature du fluide sur le transfert de chaleur par convection.

On préfère donc chercher une relation sous la forme [3,4]:

$$Nu = f(Re, Pr) \quad (4.1)$$

### 4.1.4 Avantages de l'utilisation des grandeurs réduites

Ils concernent essentiellement la représentation, la comparaison et la recherche des résultats expérimentaux :

- La représentation des résultats expérimentaux est simplifiée on pourra avoir une courbe reliant 2 variables ou une abaque reliant 3 variables réduites au lieu d'une relation liant  $(3 + p)$  paramètres.
- La comparaison des résultats expérimentaux est aussi très rapide et aisée, quel que soit le chercheur, même si le système d'unité utilisé est différent puisque les grandeurs réduites sont sans dimension.
- La recherche des résultats expérimentaux est facilitée et ordonnée : s'il suffit de tracer une courbe entre deux variables réduites, c'est qu'il suffit d'effectuer une seule série d'expériences.

#### Remarque :

Il faut toutefois bien comprendre que la méthode de l'analyse dimensionnelle qui fournit les grandeurs réduites ne donne pas la forme de la relation qui les lie, la recherche de cette relation fait l'objet du dépouillement des résultats expérimentaux.

#### Quelques groupements sans dimensions

## Chapitre 4. Transfert de chaleur par convection

Groupement	
$Re = \frac{\rho u D}{\mu}$	Nombre de Reynolds
$Pr = \frac{c_p \mu}{\lambda}$	Nombre de Prandtl
$Nu = \frac{h D}{\lambda}$	Nombre de Nusselt
$Pe = \frac{\rho u D c_p}{\lambda}$	Nombre de Peclet
$Ma = \frac{h}{\rho u c_p}$	Nombre de Margoulis
$Gr = \frac{\beta_g \Delta T \rho^2 L^2}{\mu^2}$	Nombre de Grashof
$Ra = \frac{c_p \beta_g \Delta T \rho^2 L^3}{\lambda \mu}$	Nombre de Rayleigh

### 4.2 Convection sans changement d'état[3,4]

#### 4.2.1 Généralités. Définitions

Les transferts de chaleur qui s'effectuent simultanément avec des transferts de masse sont dits transferts de chaleur par convection. Ce mode d'échange de chaleur existe au sein des milieux fluides dans lesquels il est généralement prépondérant.

#### Convection naturelle et forcée

Selon la nature du mécanisme qui provoque le mouvement du fluide on distingue :

- La convection libre ou naturelle : le fluide est mis en mouvement sous le seul effet des différences de masse volumique résultant des différences de températures sur les frontières et d'un champ de forces extérieures (la pesanteur).
- La convection forcée : le mouvement du fluide est induit par une cause indépendante des différences de température (pompe, ventilateur,...).

L'étude du transfert de chaleur par convection permet de déterminer les échanges de chaleur se produisant entre un fluide et une paroi.

#### Régime d'écoulement

Compte tenu du lien entre le transfert de masse et le transfert de chaleur, il est nécessaire de prendre en compte le régime d'écoulement. Considérons à titre d'exemple l'écoulement d'un fluide dans une conduite :

- En régime laminaire, l'écoulement s'effectue par couches pratiquement indépendantes.

## Chapitre 4. Transfert de chaleur par convection

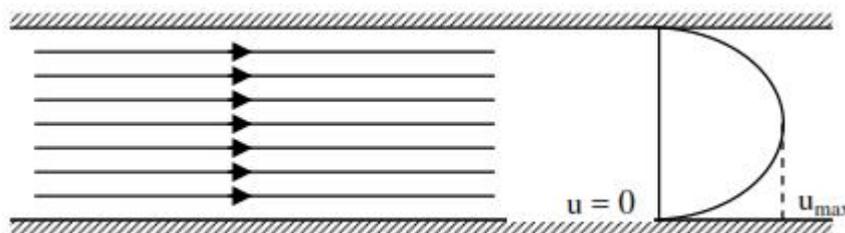


Figure 4.2 : Schématisation d'un écoulement laminaire

Entre deux filets fluides adjacents les échanges de chaleur s'effectuent donc :

- Par conduction uniquement si l'on considère une direction normale aux filets fluides.
- Par convection et conduction (négligeable) si l'on considère une direction non normale aux filets fluides.

- En régime turbulent, l'écoulement n'est pas unidirectionnel :

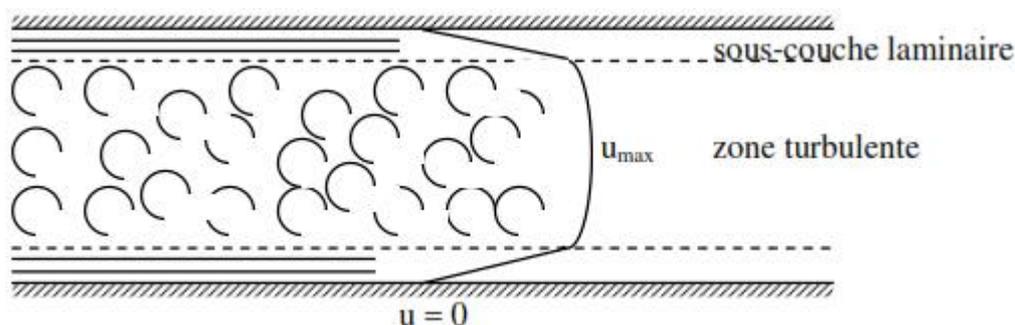


Figure 4.3 : Schématisation d'un écoulement turbulent

L'échange de chaleur dans la zone turbulente s'effectue par convection et conduction dans toutes les directions. On vérifie que la conduction moléculaire est généralement négligeable par rapport à la convection et à la « diffusion turbulente » (mélange du fluide dû à l'agitation turbulente) en dehors de la sous-couche laminaire.

### 4.2.2 Expression du flux de chaleur

#### Analogie de Reynolds

De même qu'au niveau moléculaire on explique la viscosité des gaz par la transmission des quantités de mouvement des molécules lors des chocs intermoléculaires, on explique la transmission de la chaleur par la transmission d'énergie cinétique lors de ces mêmes chocs.

Cette liaison intime des phénomènes de viscosité et de transfert de chaleur conduit à l'analogie de Reynolds : dans un écoulement fluide avec transfert de chaleur, le profil des vitesses et le profil des températures sont liés par une relation de similitude schématisée sur la figure 4.4. Cette similitude sera démontrée plus loin dans le cas d'un écoulement sur une plaque plane chauffée[3,4].

## Chapitre 4. Transfert de chaleur par convection

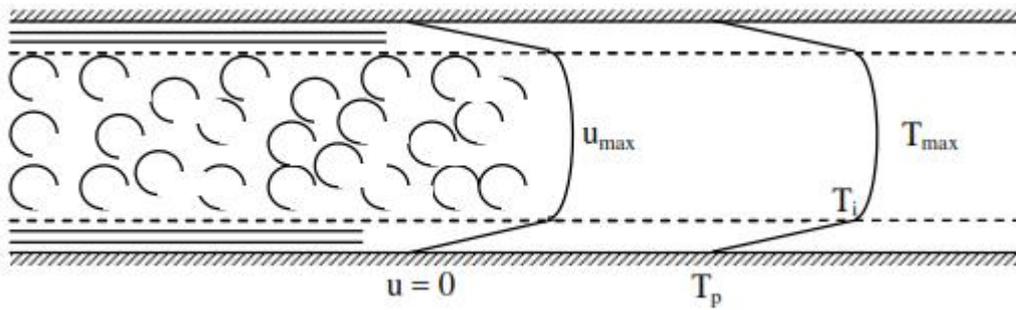


Figure 4.4 : Représentation de l'analogie de Reynolds dans le cas d'un écoulement turbulent dans un tube

### Couches limites dynamique et thermique

Quel que soit le régime d'écoulement, il demeure une couche limite dynamique dans laquelle l'écoulement est laminaire et dont l'épaisseur est d'autant plus réduite que le nombre de Reynolds est grand. L'épaisseur de Transferts thermiques cette couche limite varie en fonction de nombreux paramètres : nature du fluide, température, rugosité de la paroi, ...

L'analogie de Reynolds montre que le gradient thermique est particulièrement important au voisinage de la paroi, dans une couche limite thermique qui se développe de manière analogue à la couche limite dynamique. Quel que soit le régime d'écoulement du fluide, on considère que la résistance thermique est entièrement située dans cette couche limite thermique qui joue le rôle d'isolant.

Ceci correspond au modèle de Prandtl représenté sur la figure 4.5 à titre d'exemple pour l'écoulement turbulent d'un fluide dans une conduite.

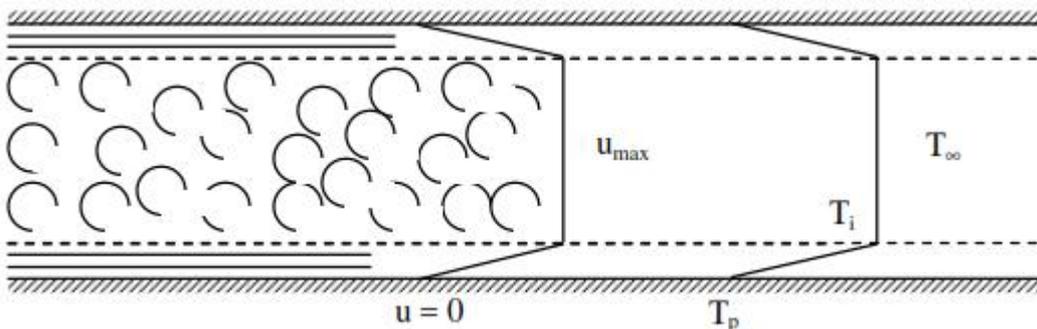


Figure 4.4 : Représentation du modèle de Prandtl pour un écoulement turbulent dans une conduite

### Expression du flux

Quel que soit le type de convection (libre ou forcée) et quel que soit le régime d'écoulement du fluide (laminaire ou turbulent), le flux de chaleur est donné par la relation dite loi de Newton :

$$\dot{Q} = h S \quad (5.4)$$

Le problème majeur à résoudre avant le calcul du flux de chaleur consiste à déterminer le coefficient de transfert de chaleur par convection  $h$  qui dépend d'un nombre important de paramètres : caractéristiques du fluide, de l'écoulement, de la température, de la forme de la surface d'échange,...

## Chapitre 4. Transfert de chaleur par convection

On trouvera dans le tableau 4.1 l'ordre de grandeur du coefficient de transfert de chaleur par convection pour différentes configurations[4,5].

Tableau 4.1 : Ordre de grandeur du coefficient de transfert de chaleur par convection

Configuration	$h$ ( $\text{Wm}^{-2} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ )
<u>Convection naturelle</u>	
Dans un gaz	2-10
Dans un liquide	100-1000
<u>Convection forcée</u>	
Avec un gaz	10-200
Avec un liquide	100-5000
<u>Ebullition de l'eau</u>	
Dans un récipient	2500-35000
En écoulement dans un tube	5000-100000
<u>Condensation de l'eau sous 1 atm</u>	
Sur une surface verticale	1000-11000
A l'extérieur de tubes horizontaux	10000-25000

### 4.2.3 Calcul du flux de chaleur en convection forcée[4,5]

#### Calcul exact

Dans certains cas de figure simples, un calcul théorique peut permettre d'aboutir à une expression analytique du flux de chaleur échangé par convection entre un fluide et une paroi. Nous traiterons ici à titre d'exemple le cas classique de l'écoulement laminaire en régime permanent d'un fluide à propriétés physiques constantes à la température  $T$  sur une paroi plane de longueur  $L$  maintenue à une température  $T_p$  (cf. figure 4.6).

On constate que la vitesse du fluide évolue d'une valeur nulle à la paroi à une valeur proche de  $u$  dans une

zone d'épaisseur  $(x)$  appelée couche limite dynamique. De la même manière, la température du fluide évolue de la valeur  $T_p$  à la paroi à une valeur proche de  $T$  dans une zone d'épaisseur  $(x)$  appelée couche limite thermique.

## Chapitre 4. Transfert de chaleur par convection

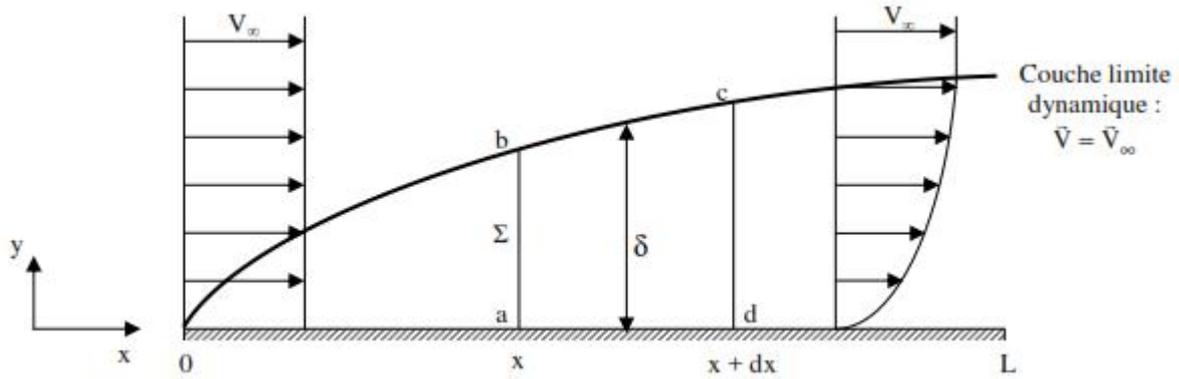


Figure 4.6 : Schématisation du développement d'une couche limite dynamique sur une plaque plane

L'équation de conservation de la masse s'écrit sous forme intégrale:

$$\int_{\Lambda} \frac{\partial \rho}{\partial t} dv + \int_{\Sigma} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dS = 0$$

Où  $\vec{n}$  est la normale extérieure à  $\Sigma$ .

$$\int_{\Sigma} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dS = 0$$

Où  $\vec{n}$  est la normale extérieure à  $\Sigma$ .

En régime permanent. Appliquons cette relation au volume [abcd] représenté sur la figure 4.6 :

$$\int_{\Sigma} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dS = \underbrace{-\rho \left( \int_0^{\delta} u dy \right)_x}_{\text{flux masse sortant par ab}} + \underbrace{\rho \left( \int_0^{\delta} u dy \right)_{x+dx}}_{\text{flux masse sortant par cd}} + \underbrace{\int_{bc} \rho \vec{V}_{\infty} \cdot \vec{n} dS}_{\text{flux masse sortant par bc}} = 0$$

On en déduit :

$$\int_{bc} \rho \vec{V}_{\infty} \cdot \vec{n} dS = -\rho \frac{d}{dx} \left( \int_0^{\delta} u dy \right) dx$$

L'équation de conservation de la quantité de mouvement en régime permanent (Théorème d'Euler) s'écrit :

$$\int_{\Sigma} \rho \vec{V} \left( \vec{V} \cdot \vec{n} \right) dS = \int_{\Lambda} \rho \vec{f} dv + \int_{\Sigma} \vec{T} dS = \int_{\Sigma} \vec{T} dS \quad \text{car } \vec{f} = 0 \text{ (pas de force de volume due à un champ extérieur)}$$

## Chapitre 4. Transfert de chaleur par convection

Où  $T$  sont les forces extérieures (par unité de surface) s'exerçant par contact sur les faces de la surface délimitant le volume .

Appliquons cette relation au volume [abcd] :

$$\int_{\Sigma} \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS = -\rho \left( \int_0^{\delta} \vec{V} u dy \right)_x + \rho \left( \int_0^{\delta} \vec{V} u dy \right)_{x+dx} + \int_{bc} \rho \vec{V}_{\infty} (\vec{V}_{\infty} \cdot \vec{n}) dS \quad (\text{par unité de largeur})$$

Soit en projection suivant Ox :

$$\int_{\Sigma} \rho u (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS = -\rho \left( \int_0^{\delta} u^2 dy \right)_x + \rho \left( \int_0^{\delta} u^2 dy \right)_{x+dx} + \int_{bc} \rho u_{\infty} (\vec{V}_{\infty} \cdot \vec{n}) dS$$

$$\int_{\Sigma} \rho u (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS = -\rho \left( \int_0^{\delta} u^2 dy \right)_x + \rho \left( \int_0^{\delta} u^2 dy \right)_{x+dx} + \rho u_{\infty} \int_{bc} \vec{V}_{\infty} \cdot \vec{n} dS$$

Analysons les forces en présence suivant Ox :

- sur [ad] s'exerce le frottement pariétal
- sur [bc] comme le profil de vitesse est uniforme, il n'y a pas de frottement
- il n'y a pas de forces de pression puisque la pression est uniforme dans l'écoulement.

On peut donc écrire :

$$\int_{\Sigma} \vec{T} dS = -\tau_p dx \quad \text{d'où :} \quad -\tau_p dx = \rho \frac{d}{dx} \left( \int_0^{\delta} u^2 dy \right) dx - \rho u_{\infty} \frac{d}{dx} \left( \int_0^{\delta} u dy \right) dx \quad \text{car} \quad \int_{\Sigma} \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS = \int_{\Sigma} \vec{T} dS$$

On en déduit :

$$\frac{\tau_p}{\rho u_{\infty}^2} = \frac{d}{dx} \left[ \delta \int_0^1 \frac{u}{u_{\infty}} \left( 1 - \frac{u}{u_{\infty}} \right) d\left(\frac{y}{\delta}\right) \right]$$

$$\text{On en déduit :} \quad \frac{\tau_p}{\rho u_{\infty}^2} = \frac{d}{dx} \left[ \delta \int_0^1 \frac{u}{u_{\infty}} \left( 1 - \frac{u}{u_{\infty}} \right) d\left(\frac{y}{\delta}\right) \right] \quad (a)$$

On cherche a priori la vitesse sous la forme simple d'un profil parabolique :  $\frac{u}{u_{\infty}} = a + b \left(\frac{y}{\delta}\right) + c \left(\frac{y}{\delta}\right)^2$

La vitesse est nulle à la paroi :  $u(y=0) = 0$

La continuité de la vitesse et du frottement à la frontière de la couche limite impose les conditions suivantes :

$$u(y=\delta) = u_{\infty}$$

$$\mu \frac{du}{dy} (y=\delta) = 0$$

$$\text{On en déduit que :} \quad \frac{u}{u_{\infty}} = \frac{y}{\delta} \left( 2 - \frac{y}{\delta} \right) \quad (b)$$

$$\text{et} \quad \tau_p = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = 2\mu \frac{u_{\infty}}{\delta}$$

$$\text{Les relations (a) et (b) conduisent à :} \quad \frac{2\mu}{\rho u_{\infty} \delta} = \frac{2}{15} \frac{d\delta}{dx}$$

## Chapitre 4. Transfert de chaleur par convection

Puis par intégration :  $\delta^2 = 30 \frac{\mu x}{\rho u_\infty}$  ou encore :  $\left(\frac{\delta}{x}\right)^2 = 30 \frac{\mu}{\rho u_\infty x} = \frac{30}{Re_x}$

$$\tau_p = 2\mu \frac{u_\infty}{\delta} = 2\mu u_\infty \sqrt{\frac{\rho u_\infty}{30\mu x}}$$

On en déduit l'expression du coefficient de frottement :  $C_{f_x} = \frac{\tau_p}{\frac{1}{2}\rho u_\infty^2} = \frac{2\mu u_\infty \sqrt{\frac{\rho u_\infty}{30\mu x}}}{\frac{1}{2}\rho u_\infty^2}$

On obtient finalement :  $C_{f_x} = \frac{0,73}{Re_x^{0,5}}$

Une analyse plus précise (équations locales et pas d'hypothèses sur la forme du profil de vitesse) conduirait à une constante de 0,664 au lieu de 0,73.

A pression constante, la variation d'enthalpie d'un système est égale à la chaleur fournie à ce système. En appliquant ce principe à un volume ( ) de surface ( ) et en négligeant la dissipation visqueuse (source interne de chaleur correspondant à la dégradation de l'énergie mécanique en chaleur), il vient :

$$\int_\Lambda \frac{\partial}{\partial t}(\rho H) dV + \int_\Sigma \left( \rho H \vec{V} + \vec{q} \right) \cdot \vec{n} dS$$

où H désigne l'enthalpie massique du fluide et q le vecteur densité de flux de chaleur.

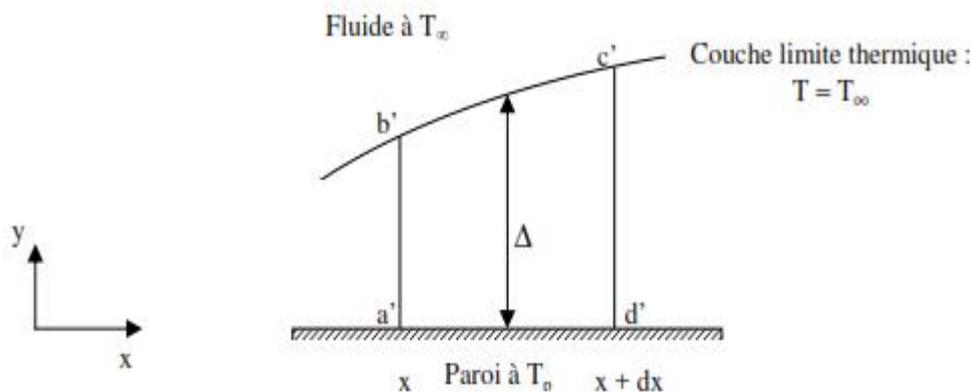


Figure 4.7 : Schématisation de la couche limite thermique sur une plaque plane

## Chapitre 4. Transfert de chaleur par convection

Appliquons cette relation en régime permanent au volume [a'b'c'd'] représenté sur la figure 5.7 pour un fluide tel que  $H = c_p (T - T_0)$  (la pression est supposée constante). La densité de flux de chaleur conductif est nulle sur la surface [b'c'] puisqu'à l'extérieur de la couche limite thermique la température est uniforme et vaut  $T_\infty$ . D'autre part, on néglige le flux de chaleur longitudinal (suivant Ox) devant le flux de chaleur transversal (suivant Oy), la température variant beaucoup plus rapidement dans la direction Oy que dans la direction Ox (hypothèse de couche limite). Il vient alors :

$$-\left(\rho c_p \int_0^\Delta u T dy\right)_x + \left(\rho c_p \int_0^\Delta u T dy\right)_{x+dx} + \rho c_p T_\infty \int_{b'c'} u dS - q_p dx = 0$$

où  $q_p = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0}$  est la densité de flux de chaleur échangé à la paroi (positive si entrant dans le volume

[a'b'c'd']).

En appliquant la conservation de la masse au volume [a'b'c'd'], il vient :

$$\int_{b'c'} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dS = \rho \int_{b'c'} u dS = -\rho \frac{d}{dx} \left( \int_0^\Delta u dy \right)$$

$$d'où : \frac{d}{dx} \left( \rho c_p \int_0^\Delta u T dy \right) dx - \rho c_p T_\infty \frac{d}{dx} \left( \int_0^\Delta u dy \right) dx - q_p dx = 0$$

$$\frac{q_p}{\rho c_p u_\infty (T_p - T_\infty)} = + \frac{d}{dx} \left[ \Delta \int_0^1 \frac{u}{u_\infty} \left( 1 - \frac{T - T_p}{T_\infty - T_p} \right) d\left(\frac{y}{\Delta}\right) \right] \quad (c)$$

On cherche a priori la température sous la forme :  $\frac{T - T_p}{T_\infty - T_p} = a + b \left(\frac{y}{\Delta}\right) + c \left(\frac{y}{\Delta}\right)^2$

La continuité de la température et du flux de chaleur impose les conditions suivantes :

$$\frac{T - T_p}{T_\infty - T_p} (y = 0) = 0$$

$$\frac{T - T_p}{T_\infty - T_p} (y = \Delta) = 1$$

$$\lambda \frac{dT}{dy} (y = \Delta) = 0$$

$$\text{On en déduit que : } \frac{T - T_p}{T_\infty - T_p} = \frac{y}{\Delta} \left( 2 - \frac{y}{\Delta} \right) \quad (d)$$

$$\text{Et : } q_p = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} = 2\lambda \frac{T_p - T_\infty}{\Delta}$$

$$\text{Les relations (c) et (d) permettent d'écrire : } \frac{q_p}{\rho c_p u_\infty (T_p - T_\infty)} = + \frac{d}{dx} \left[ \Delta \int_0^1 \frac{y}{\delta} \left( 2 - \frac{y}{\delta} \right) \left( 1 - \frac{y}{\Delta} \left( 2 - \frac{y}{\Delta} \right) \right) d\left(\frac{y}{\Delta}\right) \right]$$

## Chapitre 4. Transfert de chaleur par convection

On se place dans le cas où  $\Delta < \delta$  et on suppose que  $r = \frac{\Delta}{\delta} \leq 1$  reste constant

La relation précédente devient alors : 
$$\Delta \frac{d\Delta}{dx} = \frac{12 \lambda}{\rho c_p u_\infty r \left(1 - \frac{r}{5}\right)}$$

Puis après intégration : 
$$\left(\frac{\Delta}{x}\right)^2 = \frac{24}{Re_x Pr} \frac{1}{r \left(1 - \frac{r}{5}\right)} \quad \text{où } Re_x = \frac{\rho V_\infty x}{\mu}$$

Par ailleurs : 
$$\left(\frac{\delta}{x}\right)^2 = \frac{30}{Re_x}$$

r est donc solution de l'équation : 
$$r^2 = \frac{4}{5 Pr \left(1 - \frac{r}{5}\right) r} \quad (e)$$

Dans le cas  $Pr = 1$ , la solution de l'équation (e) est  $r = 1$ , les couches limites dynamique et thermique ont la même épaisseur et il y a analogie complète entre les transferts de chaleur et de quantité de mouvement. C'est le cas des gaz pour lesquels  $Pr \approx 1$ .

Le cas  $r < 1$  correspond au cas  $Pr > 1$ , c'est le cas de l'eau par exemple ( $Pr \approx 7$ ). Une solution approchée de

Le cas  $r < 1$  correspond au cas  $Pr > 1$ , c'est le cas de l'eau par exemple ( $Pr \approx 7$ ). Une solution approchée de

l'équation (e) est alors : 
$$\frac{\Delta}{\delta} \approx Pr^{-\frac{1}{3}}$$

La densité de flux de chaleur à la paroi s'écrit : 
$$q_p = h (T_p - T_\infty) = 2 \frac{\lambda}{\Delta} (T_p - T_\infty)$$

Et : 
$$Nu_x = \frac{h x}{\lambda} = \frac{2 x}{\delta} \frac{\delta}{\Delta} = 0,36 Re_x^{\frac{1}{2}} Pr^{\frac{1}{3}}$$

Un calcul plus précis conduirait à :

$$Nu_x = 0,332 Re_x^{1/2} Pr^{1/3} \quad (4.5)$$

Le flux global s'obtient par intégration de  $q_p$  entre  $x = 0$  et  $x = L$  et on en déduit le nombre de Nusselt moyen sur la surface de longueur  $L$  :

$$\overline{Nu}_L = 0,664 Re_L^{1/2} Pr^{1/3} \quad (5.6)$$

Calcul approché

## Chapitre 4. Transfert de chaleur par convection

Dans les cas plus complexes où une solution analytique ne peut pas être établie, on utilise des corrélations déduites d'expérimentations.

L'application de l'analyse dimensionnelle montre que la relation liant le flux de chaleur transféré par convection aux variables dont il dépend peut être recherchée sous la forme d'une relation entre trois nombres adimensionnels :

$$\boxed{\text{Nu} = f(\text{Re}, \text{Pr})} \quad (5.7)$$

Définis par :

$$\text{Nu} = \frac{h D}{\lambda} \quad \text{Nombre de Nusselt}$$

$$\text{Re} = \frac{\rho u D}{\mu} \quad \text{Nombre de Reynolds}$$

$$\text{Pr} = \frac{c_p \mu}{\lambda} \quad \text{Nombre de Prandtl}$$

où  $D$  est la dimension caractéristique de la géométrie considérée qui sera par exemple le diamètre hydraulique  $D_h = \frac{4 \times \text{Section de passage}}{\text{Périmètre}}$  pour un écoulement dans un conduit (égal au diamètre intérieur pour un conduit cylindrique), le diamètre extérieur pour un écoulement extérieur perpendiculaire à un tube, la longueur pour un écoulement à surface libre sur une plaque...

Le calcul d'un flux de chaleur transmis par convection forcée s'effectue donc de la manière suivante :

1. Calcul des nombres adimensionnels de Reynolds et de Prandtl.
2. Suivant la valeur de  $\text{Re}$  et la configuration  $\rightarrow$  choix de la corrélation (fonction  $f$  dans la relation 4.7).
3. Calcul de  $\text{Nu}$  par application de cette corrélation.
4. Calcul de  $h = \frac{\lambda \text{Nu}}{D}$  et de  $\varphi = h S (T_p - T_\infty)$ .

Pour la convection forcée, les principales corrélations sont données en annexe A.5.2. Les propriétés du fluide ( $c_p, \rho, \lambda, \mu$ ) sont calculées à une température moyenne dite température de film :  $T_f = \frac{T_p + T_\infty}{2}$

### 4.2.4 Calcul du flux de chaleur en convection naturelle[4,5]

#### Mécanisme de la convection naturelle

Considérons un fluide au repos en contact avec une paroi plane à température  $T_0$ . Si l'on porte la paroi à une température  $T = T_0 + \Delta T$ , le fluide au contact de la paroi va s'échauffer par conduction et la masse du volume unité va passer de  $\rho_0$  à  $\rho_0 - \Delta \rho$  :

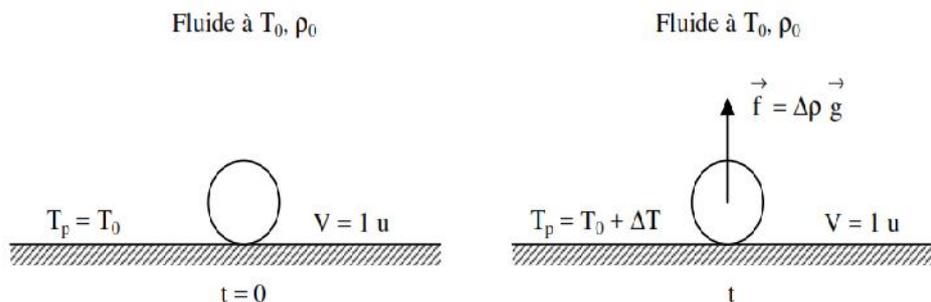


Figure 4.8 : Représentation du mécanisme de convection naturelle

## Chapitre 4. Transfert de chaleur par convection

Il sera donc soumis à une force ascensionnelle  $\vec{f} = -\Delta\rho \vec{g}$ . Le principe fondamental de la dynamique permet d'évaluer l'accélération du fluide :

$$\text{Pour un volume unité : } m = \rho \text{ d'où : } \Delta\rho g = \rho \gamma \text{ et } \gamma = \frac{\Delta\rho}{\rho} g$$

En introduisant le coefficient de dilatation cubique  $\beta$  du fluide défini par  $\beta = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\Delta\rho}{\Delta T} \right)_p$ , il vient :

$$\gamma = -\beta g \Delta T$$

$\beta g \Delta T$  est donc le module de l'accélération produite par l'expansion thermique due à la variation  $\Delta T$  de la température  $T_0$ . Ce mouvement du fluide induit par les différences de masse volumique résultantes des gradients de température va donner naissance aux courants de convection.

Dans le cas d'un transfert de chaleur par convection naturelle le long d'une plaque plane, le coefficient de convection dépend des caractéristiques du fluide :  $\lambda$ ,  $\rho$ ,  $\mu$ ,  $c_p$ ,  $\beta$ ,  $g$ , de la paroi caractérisée par la longueur  $L$  et de l'écart de température  $\Delta\theta$  aux bornes du film, ce que l'on peut traduire par une relation du type :

$$\phi = f(\lambda, \rho, \mu, c_p, \beta, g, L, \Delta T)$$

Dans le système M, L, T,  $\theta$ , Q, cette relation entre 8 grandeurs se réduit à une relation entre trois nombres adimensionnels :

$$Nu = f(Gr, Pr) \quad (4.8)$$

Définis par :

$$Nu = \frac{h D}{\lambda} \quad \text{Nombre de Nusselt}$$

$$Gr = \frac{\beta g \Delta T \rho^2 L^3}{\mu^2} \quad \text{Nombre de Grashof}$$

$$Pr = \frac{c_p \mu}{\lambda} \quad \text{Nombre de Prandtl}$$

### Signification physique du nombre de Grashof

Lorsque la masse unité du fluide, soumise à l'accélération  $\beta g \Delta T$  subit une variation d'altitude  $L$ , la conservation de l'énergie permet d'écrire :

$$\frac{u^2}{2} = \beta g \Delta T L$$

$\frac{u^2}{2}$  représente la variation d'énergie cinétique et  $\beta g \Delta T L$  la variation d'énergie potentielle.

On voit donc que le nombre de Grashof peut se mettre sous la forme :

$$Gr = \frac{1}{2} \left( \frac{u L \rho}{\mu} \right)^2$$

### Calcul du flux de chaleur en convection naturelle

L'application de l'analyse dimensionnelle montre que la relation liant le flux de chaleur

## Chapitre 4. Transfert de chaleur par convection

transféré par convection aux variables dont il dépend peut être recherchée sous la forme d'une relation entre trois nombres adimensionnels :  $Nu = f(Gr, Pr)$  définis par :

$$Nu = \frac{h D}{\lambda} \quad \text{Nombre de Nusselt}$$

$$Gr = \frac{\beta g \Delta T \rho^2 L^3}{\mu^2} \quad \text{Nombre de Grashof}$$

$$Pr = \frac{c_p \mu}{\lambda} \quad \text{Nombre de Prandtl}$$

Le calcul d'un flux de chaleur transmis par convection naturelle s'effectue donc de la manière suivante :

1. Calcul des nombres adimensionnels de Grashof et de Prandtl .
2. Suivant la valeur de Gr et configuration choix de la corrélation.
3. Calcul de Nu par application de cette corrélation.
4. Calcul de h

## **Chapitre 5.**

# **Transferts de chaleur par rayonnement**

## Chapitre 5. Transfert de chaleur par rayonnement

### 5 Transfert de chaleur par rayonnement[5,6]

#### 5.1 Généralités. Définitions

##### 5.1.1 Nature du rayonnement

Tous les corps, quel que soit leur état : solide, liquide ou gazeux, émettent un rayonnement de nature électromagnétique. Cette émission d'énergie s'effectue au détriment de l'énergie interne du corps émetteur.

Le rayonnement se propage de manière rectiligne à la vitesse de la lumière, il est constitué de radiations de différentes longueurs d'onde comme l'a démontré l'expérience de William Herschel :

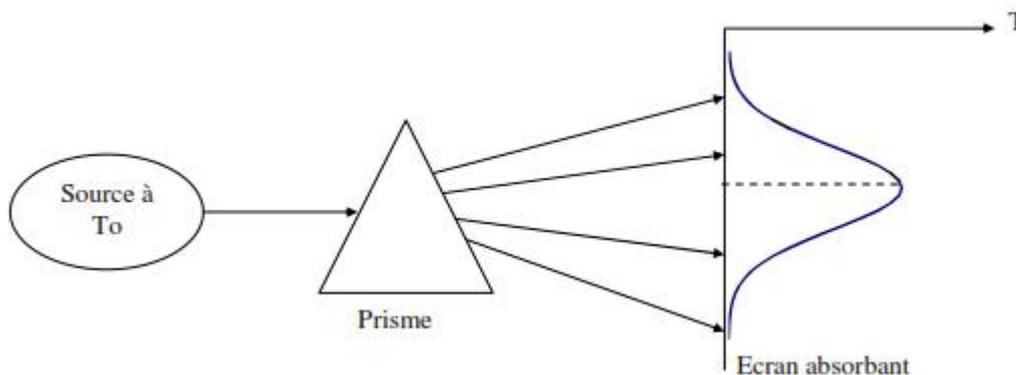


Figure 5.1 : Principe de l'expérience de William Herschel

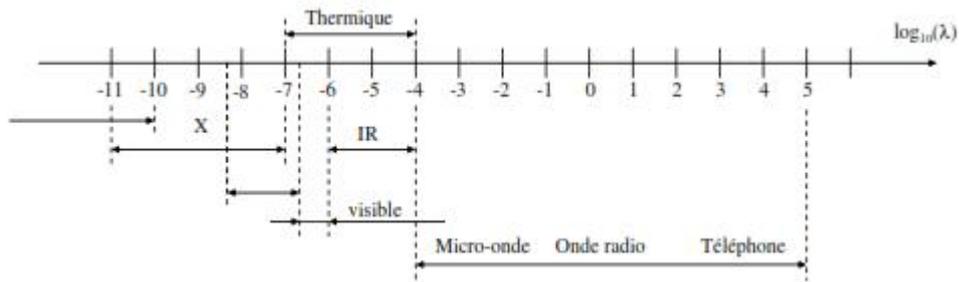
En passant à travers un prisme, les radiations sont plus ou moins déviées selon leur longueur d'onde. On envoie donc les radiations émises par une source à la température  $T_0$  sur un prisme et on projette le faisceau dévié sur un écran absorbant (noirci), on obtient ainsi la décomposition du rayonnement total incident en un spectre de radiations monochromatiques.

Si l'on déplace le long de l'écran un thermomètre, on mesure la température  $T_e$  caractérisant l'énergie reçue par l'écran dans chaque longueur d'onde. En construisant la courbe  $T_e = f(\lambda)$ , on obtient la répartition spectrale de l'énergie rayonnée pour la température  $T_0$  de la source. On constate alors que:

- L'énergie émise est maximale pour une certaine longueur d'onde  $\lambda_m$  variable avec  $T_0$ .
- L'énergie n'est émise que sur un intervalle  $[\lambda_1, \lambda_2]$  de longueur d'onde caractérisant le rayonnement thermique.

On trouvera représentés sur la figure 5.2 les différents types d'ondes électromagnétiques et leurs longueurs d'ondes correspondantes. On retiendra que le rayonnement thermique émis par les corps se situe entre  $0,1$  et  $100\mu\text{m}$ . On notera par ailleurs que le rayonnement est perçu par l'homme :

## Chapitre 5. Transfert de chaleur par rayonnement



### 5.1.2 Définitions[5,6]

#### 5.1.2.1 Classification

Les grandeurs physiques seront distinguées selon :

- La composition spectrale du rayonnement
- Si la grandeur est relative à l'ensemble du spectre elle est dite totale.
- Si elle concerne un intervalle spectral étroit d autour d'une longueur d'onde elle est dite monochromatique :  $G$
- La distribution spatiale du rayonnement
- Si la grandeur est relative à l'ensemble des directions de l'espace, elle est dite hémisphérique.
- Si elle caractérise une direction donnée de propagation, elle est dite directionnelle :  $G_x$ .

#### 5.1.2.2 Définitions relatives aux sources

##### Flux

- On appelle flux d'une source  $S$  la puissance rayonnée notée  $\Phi$  par  $S$  dans tout l'espace qui l'entoure, sur toutes les longueurs d'onde. Le flux s'exprime en  $W$ .
- Le flux envoyé par un élément de surface  $dS$  dans un angle solide élémentaire  $d\Omega$  est noté  $d^2\Phi$
- Le flux envoyé dans tout l'espace par une surface élémentaire  $dS$  est noté  $d\Phi$
- Le flux envoyé par une surface  $S$  dans l'angle solide  $d\Omega$  entourant la direction  $Ox$  est noté  $d\Phi_x$ .

Nous avons donc les relations suivantes :

$$d\Phi = \int_{\Omega} d^2\Phi \quad \text{et} \quad \Phi = \int_S d\Phi = \int_{\Omega} d\Phi_x$$

*Rappel sur les angles solides élémentaires :*

L'angle solide sous lequel depuis un point  $O$  on voit une surface  $S$  est par définition l'aire de la surface intersection de la sphère de rayon unité et du cône de sommet  $O$  s'appuyant sur le contour de la surface  $S$ .

L'angle solide élémentaire  $d\Omega$  sous lequel est vu d'un point  $O$  le contour d'une petite surface  $dS$  (assimilée à une surface plane) peut être calculé par :

## Chapitre 5. Transfert de chaleur par rayonnement

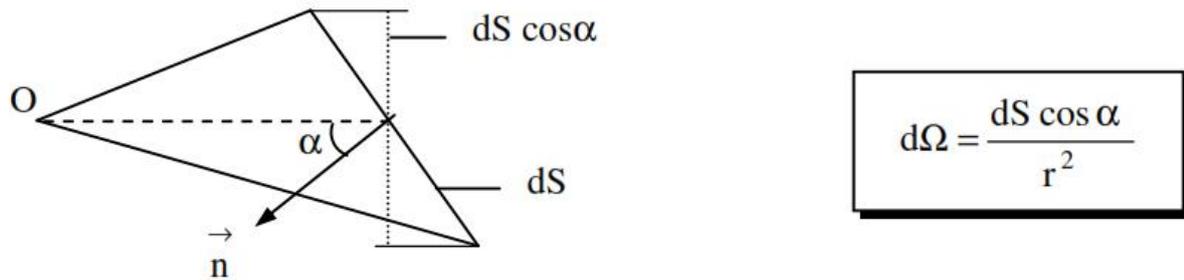


Figure 5.3 : Schéma de l'angle solide

Propriétés :

- La valeur d'un angle solide est comprise entre 0 et 4
- Pour un cône de demi-angle au sommet :

### Emittance énergétique

- Monochromatique :

Un élément de surface  $d_s$  émet un certain flux d'énergie par rayonnement dans toutes les directions du espace. Ce flux est réparti sur un intervalle de longueurs d'ondes. Si l'on considère le flux d'énergie émis entre les deux longueurs d'ondes  $\lambda$  et  $\lambda + d\lambda$  on définit l'émittance monochromatique d'une source à la température T par :

$$M_{\lambda T} = \frac{d\phi_{\lambda}^{\lambda+d\lambda}}{dS d\lambda}$$

- Totale :

C'est la densité de flux de chaleur émise par rayonnement par  $dS$  sur tout le spectre des longueurs d'ondes. Elle n'est plus fonction que de la température T et de la nature de la source [5,6]:

$$M_T = \int_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} M_{\lambda T} d\lambda = \frac{d\phi}{dS}$$

### Intensité énergétique dans une direction

On appelle intensité énergétique  $I_x$  le flux par unité d'angle solide émis par une surface  $dS$  dans un angle solide  $d\Omega$  entourant la direction Ox :

$$I_x = \frac{d\phi_x}{d\Omega}$$

### Luminance énergétique dans une direction

Soit  $\alpha$  l'angle fait par la normale  $n$  à la surface émettrice S avec la direction Ox. La projection de  $dS$  sur le plan perpendiculaire à Ox définit la surface émettrice apparente  $dS_x = dS \cos \alpha$ .

## Chapitre 5. Transfert de chaleur par rayonnement

L'intensité énergétique élémentaire  $dI_x$  dans la direction  $Ox$  par unité de surface émettrice apparente  $dS_x$  s'appelle la luminance énergétique  $L_x$ . En partant de la relation (5.4) :

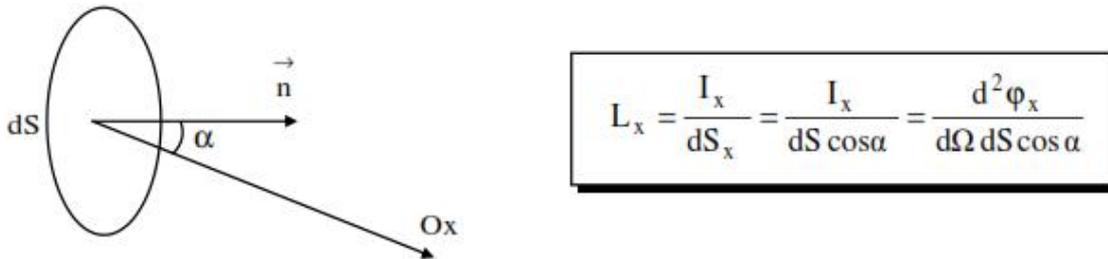


Figure 5.4 : Schéma de définition des angles

### Application : Formule de Bouguer

On déduit des définitions précédentes l'expression du flux  $d^2 \phi_x$  envoyé par un élément  $dS_i$  de luminance  $L_x$  sur un autre élément  $dS_k$  :

$$d^2 \phi_x = I_x d\Omega = L_x dS_i \cos \alpha_i d\Omega$$

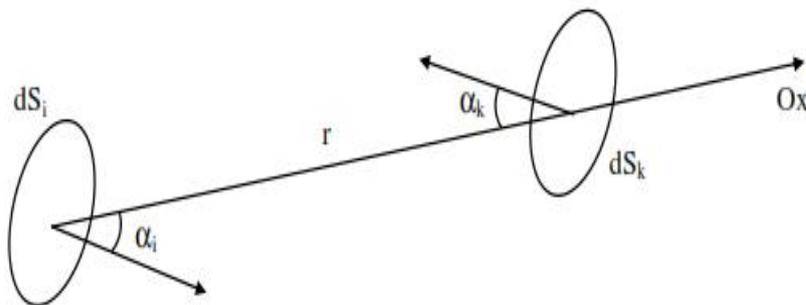


Figure 4.5 : Schéma de définition des angles dans la formule de Bouguer

Où :  $d\Omega$  est l'angle solide sous lequel on voit la surface  $dS_k$  depuis la surface  $dS_i$  donc  $d\Omega = \frac{dS_k \cos \alpha_k}{r^2}$

### 5.1.2.3 Définitions relatives à un récepteur

#### Eclairement

C'est l'homologue de l'émittance pour une source. L'éclairement est le flux reçu par unité de surface réceptrice, en provenance de l'ensemble des directions.

#### Réception du rayonnement par un solide

Quand un rayon incident d'énergie frappe un corps à la température  $T$ , une partie  $T$  de l'énergie incidente est réfléchiée par la surface  $S$ , une autre partie  $T$  est absorbée par le corps qui s'échauffe et le reste[5,6]

## Chapitre 5. Transfert de chaleur par rayonnement

T est transmis et continue son chemin :

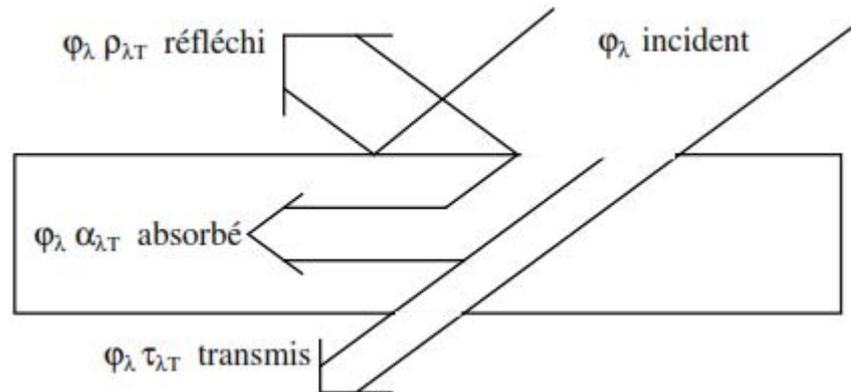


Figure 5.6 : Schématisation de la répartition d'un flux incident de rayonnement sur un solide

On a évidemment :

$$\Phi_\lambda = \Phi_\lambda \rho_{\lambda T} + \Phi_\lambda \alpha_{\lambda T} + \Phi_\lambda \tau_{\lambda T}$$

d'où :

$$\rho_{\lambda T} + \alpha_{\lambda T} + \tau_{\lambda T} = 1$$

On définit ainsi les pouvoirs monochromatiques réfléchissant  $\rho_{\lambda T}$ , absorbant  $\alpha_{\lambda T}$  et filtrant  $\tau_{\lambda T}$  qui sont fonction de la nature du corps, de son épaisseur, de sa température T, de la longueur d'onde  $\lambda$  du rayonnement incident et de l'angle d'incidence.

Si l'on considère l'énergie incidente sur tout le spectre des longueurs d'onde, on obtient les pouvoirs réfléchissants  $\rho_T$ , absorbant  $\alpha_T$  et filtrant  $\tau_T$  totaux.

### 5.1.2.4 Corps noir, corps gris

#### Corps noir

C'est un corps qui absorbe toutes les radiations qu'il reçoit indépendamment de son épaisseur, de sa température, de l'angle d'incidence et de la longueur d'onde du rayonnement incident, il est défini par :  $\alpha_T = 1$ . Une surface enduite de noir de fumée est approximativement un corps noir.

Propriétés du corps noir :

- Tous les corps noirs rayonnent de la même manière.
- Le corps noir rayonne plus que le corps non noir à la même température.

#### Corps gris

Un corps gris est un corps dont le pouvoir absorbant  $\alpha_T$  est indépendant de la longueur

## Chapitre 5. Transfert de chaleur par rayonnement

d'onde du rayonnement qu'il reçoit. Il est défini par :  $\alpha_{\lambda T} = \tau_{\lambda T}$ .

En général, on considère les corps solides comme des corps gris par intervalle et on utilise un pouvoir absorbant moyen vis-à-vis du rayonnement émis pour  $\lambda < 3 \mu\text{m}$  (rayonnement émis par des corps à haute température comme le Soleil) et un pouvoir absorbant moyen vis-à-vis du rayonnement émis pour  $\lambda > 3 \mu\text{m}$  (rayonnement émis par les corps à faible température : atmosphère, absorbeur solaire,...). On pourra à titre d'exemple considérer les valeurs suivantes pour la peinture blanche [7,8]:

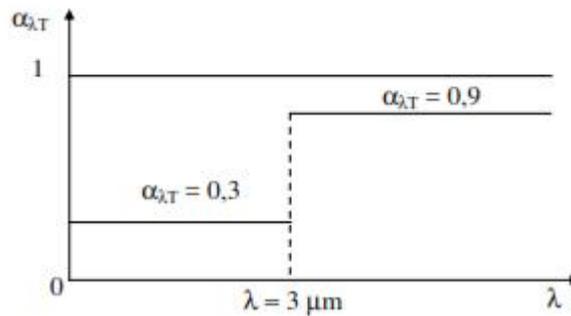
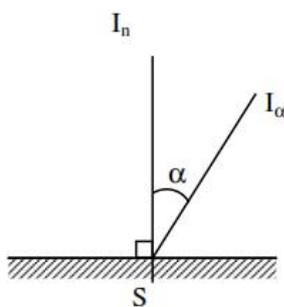


Figure 5.7 : Représentation simplifiée du pouvoir absorbant monochromatique de la peinture blanche.

### 5.2 Lois du rayonnement

#### 5.2.1 Loi de Lambert

Une source est isotrope si la luminance est indépendante de la



$$\text{Or } L_x = \frac{I_x}{dS_x} = \frac{I_x}{dS \cos \alpha}$$

De l'égalité  $L_x = L$  on déduit la loi de Lambert pour une source isotrope :

$$\boxed{\frac{dI_x}{dS} = L \cos \alpha}$$

Figure 5.8 : Schématisation de l'intensité énergétique

Ainsi l'indicatrice d'émission est une sphère tangente en O à la surface émettrice lorsque celle-ci suit la loi de Lambert :

## Chapitre 5. Transfert de chaleur par rayonnement

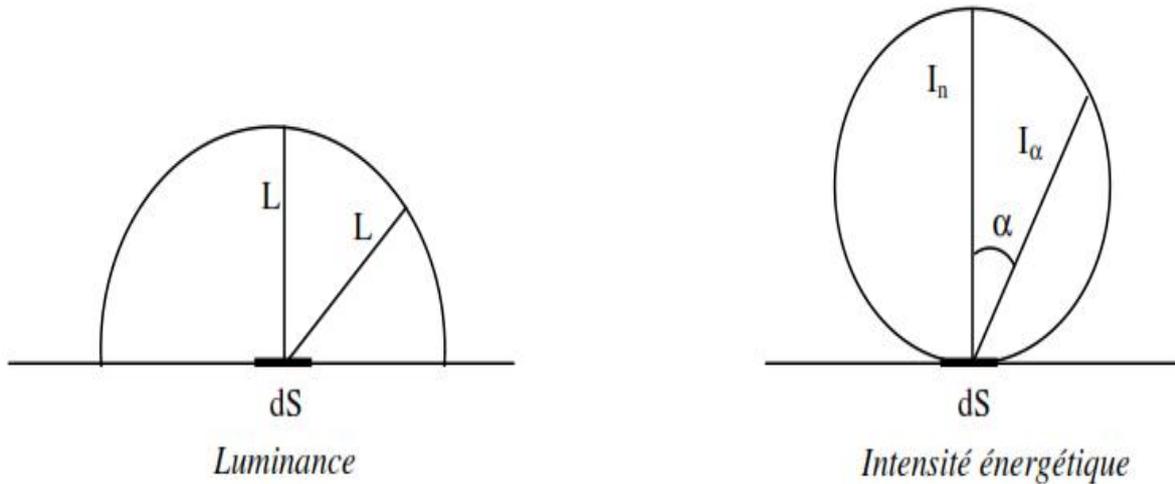


Figure 5.9 : Schématisation de la luminance et de l'intensité énergétique d'une source isotrope

### 5.2.2 Lois physiques[7,8]

#### 5.2.2.1 Loi de Kirchoff

A une température  $T$  donnée et pour une longueur d'onde donnée, le rapport les corps.

Pour le corps noir :  $\alpha_{\lambda T} = 1$ , le rapport  $\frac{M_{\lambda T}}{\alpha_{\lambda T}}$  est donc égal à  $M_{0\lambda T}$  en appelant  $M_{0\lambda T}$  l'émittance monochromatique du corps noir, donc :

$$M_{\lambda T} = \alpha_{\lambda T} M_{0\lambda T} \quad (4.9)$$

L'émittance monochromatique de tout corps est égale au produit de son pouvoir absorbant monochromatique par l'émittance monochromatique du corps noir à la même température, d'où l'intérêt de connaître le rayonnement émis par le corps noir.

#### Cas des corps gris : loi de Kirchoff généralisée

Dans le cas du corps gris, on peut généraliser cette loi ce qui facilite les applications. En effet pour un corps gris  $\alpha_T = \alpha_T$ , donc :

$$M_T = \int_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} M_{\lambda T} d\lambda = \int_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \alpha_{\lambda T} M_{0\lambda T} d\lambda = \alpha_T \int_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} M_{0\lambda T} d\lambda$$

En appelant  $M_{0T}$  l'émittance totale du corps noir à la température  $T$ , nous obtenons pour un corps gris :

$$M_T = \alpha_T M_{0T}$$

L'émittance totale  $M_T$  d'un corps gris à la température  $T$  est égal au produit de son pouvoir absorbant  $\alpha_T$  par l'émittance totale  $M_{0T}$  du corps noir à la même température.

## Chapitre 5. Transfert de chaleur par rayonnement

### 5.2.2.2 Rayonnement du corps noir[5,6]

#### Emittance monochromatique

Elle est donnée par la loi de Planck :

$$M_{o\lambda T} = \frac{C_1 \lambda^{-5}}{\exp\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right) - 1}$$

Avec :

$$C_1 = 3,742 \cdot 10^{-16} \text{ W.m}^{-2}$$

$$C_2 = 1,4385 \cdot 10^{-2} \text{ m.K}$$

La loi de Planck permet de tracer les courbes isothermes représentant les variations de  $M_{oT}$  en fonction de la longueur d'onde pour diverses températures :

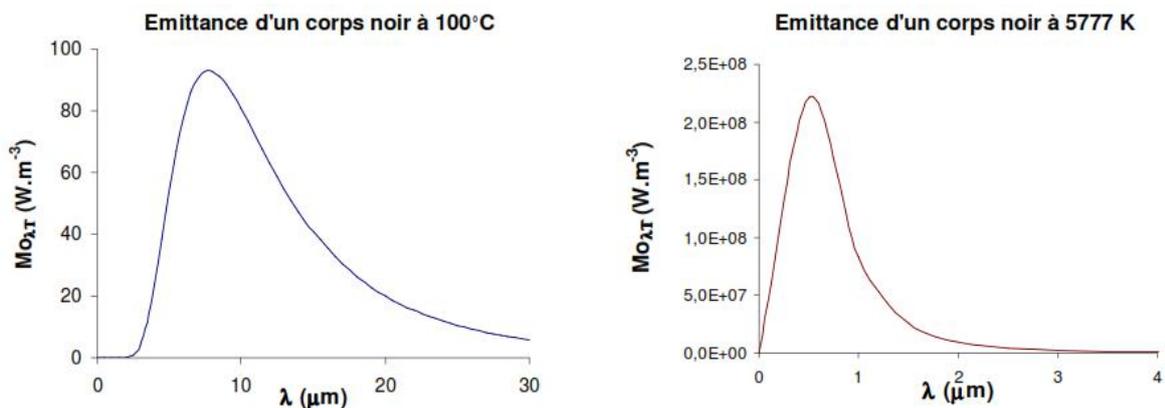


Figure 5.10 : Emittance monochromatique d'un corps noir à deux températures différentes

#### Emittance totale $M_{oT}$

L'intégration de la formule de Planck pour toutes les longueurs d'onde donne l'émissance totale  $M_{oT}$  du corps noir qui n'est plus fonction que de la température  $T$ , on obtient la loi de Stefan-Boltzmann :

$$M_{oT} = \sigma T^4$$

avec  $\sigma = 5,675 \cdot 10^{-8} \text{ W.m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$

Dans les calculs on écrira souvent :  $M_{oT} = 5,675 \left( \frac{T}{100} \right)^4$

#### Fraction de l'émissance dans un intervalle donné de longueurs d'onde [ 1, 2]

C'est la fraction du flux émis par l'unité de surface du corps noir à la température  $T$  entre

**Chapitre 5. Transfert de chaleur par rayonnement**  
les longueurs d'ondes 1 et 2 :

## Références bibliographiques:

- [1] Donald Pitts, "Theory and problems of heat transfer", second edition, Schaum's, Mc Graw-Hill, 1998.
- [2] Jean-Luc Battaglia, Andrzej Kusiak, Jean-Rodolphe Puiggali, « aux transferts thermiques: Cours et exercices corrigés », Dunod, 2014.
- [3] Michael J. Moran, "Introduction to thermal Systems Engineering: Thermodynamics, Fluid Mechanics, and Heat Transfer", John Willey & Sons Inc. 2003.
- [4] Yves JANNOT "TRANSFERTS THERMIQUES", Ecole des Mines Nancy 2<sup>ème</sup> année 2012
- [5] G. BRUHAT, Thermodynamique, Edition Masson  
J.P. BARDON, Temperatures de surface, Notions fondamentales (R2730) Edition Techniques de l'ingénieur
- [6] C. CHAVSSIN, C. HILLY et J. BARRALS Chaleur et thermodynamique, Edition Lavoisier
- [7] O. PERROT, Cours de rayonnement, 3<sup>ème</sup> Semestre, département Genie
- [8] Thermique et énergie, LV.T. de Saint-Orner Dunkerque.
- [9] Devendra Gupta, "Diffusion processes in advanced Technological Materials".
- [10] Y. Adda, J.M. Dupouy, J. Philibert et Y. Quéré, "éléments de métallurgie physique, tome 4, Diffusion, transformations", Chap. 28 (2<sup>e</sup> édition, INSTN), 1990.
- [11] D.W. Richardson, "Modern Ceramic Engineering", (Marcel Dekker).
- [12] Diffusion dans les métaux' par Pierre GUIRALDENQ Professeur des universités à l'École Centrale de Lyon (ECL) et au Conservatoire National des Arts et Métiers (Centre Associé de Lyon) Directeur de Recherches à l'ECL

## EXERCICE

### Exemple 1:

Calculer le flux de chaleur par conduction à travers un mur de pierre d'épaisseur 0.35 m, de hauteur 3.5 m et de longueur 5.7 m. les températures des faces sont respectivement 22°C et 7°C.  $\lambda = 0.805 \text{ kcal/h.m.}^\circ\text{C}$ . (Le régime est permanent, pas de source de chaleur, unidirectionnelle)

### Solution:

Le régime est permanent, pas de source de chaleur, unidirectionnelle :  $\Delta T = 0$

Pour calculer le flux de chaleur par conduction nous utilisons l'équation (2.6):

$$\Phi = \frac{\lambda S}{e} (T_1 - T_2) = \frac{0,805 \times 5,7 \times 3,5}{0,35} (22 - 7) = 688,275 \frac{\text{kcal}}{\text{h}} = 0,79916 \text{ kW}$$

### Exemple 2:

Calculer la densité du flux de chaleur qui traverse un panneau d'épaisseur 2cm et de conductivité thermique  $\lambda = 45 \text{ W/ m.}^\circ\text{C}$ , les températures aux face de panneau sont  $T_1 = 80^\circ\text{C}$  et  $T_2 = 20^\circ\text{C}$ .

### Solution:

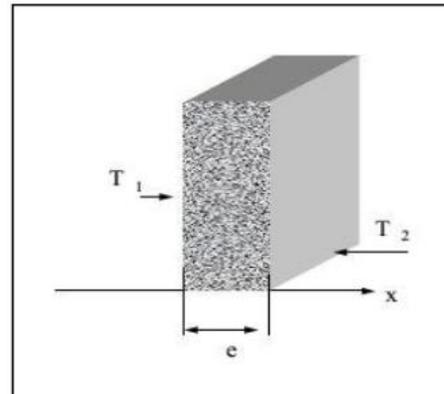
Le régime est permanent, pas de source de chaleur, unidirectionnelle :  $\Delta T = 0$

Pour calculer la densité de flux de chaleur par conduction nous utilisons l'équation (2.7):

$$q = \frac{\lambda}{e} (T_1 - T_2) = \frac{45}{0,02} (80 - 20) = 135 \text{ kW/m}^2$$

### Exemple 3:

Un mur simple dans un état thermique stable et sans puissance calorifique (pas de production de chaleur). Le mur est mince d'une épaisseur 50 mm, le flux de chaleur est parallèle à la direction  $x$ . Les températures des deux côtés sont différentes  $T_1=100^\circ\text{C}$  et  $T_2=90^\circ\text{C}$ . Calculer le profil de la température et la densité du flux de chaleur, ( $\lambda = 0.92 \text{ W/m}\cdot^\circ\text{C}$  et la surface (30mx2m)).



### Solution:

Le régime est permanent, pas de source de chaleur, unidirectionnelle :  $\Delta T = 0$

C'est l'équation de Laplace

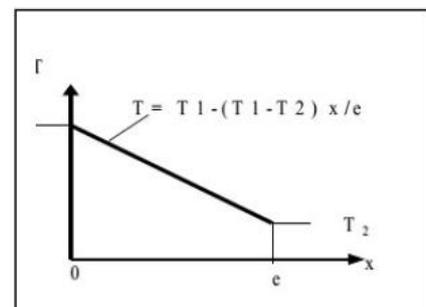
$$\Delta T = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \rightarrow \frac{dT}{dx} = A \text{ et } T(x) = Ax + B$$

Avec les conditions aux limites:  $T(x=0) = T_1 = 100$  et  $T(x=e) = T_2 = 90$

$$B = 100 \text{ et } T(x=e) = 90 = Ae + 100$$

d'où :  $T(x) = T_1 - (x/e)(T_1 - T_2)$

$$T(x) = 100 - 200x$$



Pour calculer la densité de flux de chaleur par conduction nous utilisons l'équation (2.7):

$$q = \frac{\lambda}{e} (T_1 - T_2) = \frac{0,92}{0,05} (100 - 90) = 184 \text{ W/m}^2$$

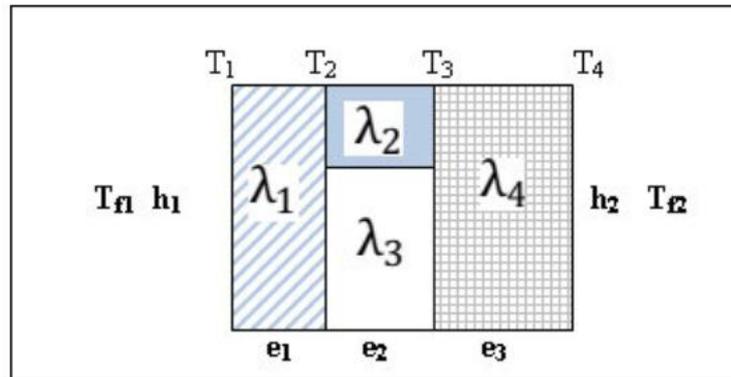
**Exemple 4:**

Soit la structure illustrée sur la figure ci-dessous:

- a) calculez la résistance thermique de chaque couche.
- b) quelle est la résistance équivalente.

Le régime est permanent, pas de source de chaleur, unidirectionnelle, la surface d'échange

(S)



**Solution:**

- a) D'après les hypothèses  $\Rightarrow \phi$  est constante

$$\phi_{\text{conv } 1} = \phi_{\text{cnd } 1} = \phi_{\text{cnd } 2} = \phi_{\text{cnd } 3} = \phi_{\text{conv } 2}$$

$$\phi_{\text{convection } 1} = h_1 S (T_{f1} - T_1) = \frac{(T_f - T_1)}{\frac{1}{h_1 S}} = \frac{(T_f - T_1)}{R_{th \text{ conv } 1}}$$

$$\Rightarrow R_{th \text{ conv } 1} = R_1 = \frac{1}{h_1 S}$$

$$\phi_{\text{cond } 1} = \frac{\lambda_1 S}{e_1} (T_1 - T_2) = \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{e_1}{\lambda_1 S}} = \frac{(T_1 - T_2)}{R_{th \text{ cond } 1}} \Rightarrow R_{th \text{ cond } 1} = R_2 = \frac{e_1}{\lambda_1 S}$$

$$\begin{aligned} \phi_{\text{cond } 2} &= \frac{\lambda_2 S}{e_2} (T_2 - T_3) + \frac{\lambda_3 S}{e_2} (T_2 - T_3) = \left( \frac{\lambda_2 S}{e_2} + \frac{\lambda_3 S}{e_2} \right) (T_2 - T_3) \\ &= \frac{(T_2 - T_3)}{R_{th \text{ cond } 2}} \Rightarrow R_{th \text{ cond } 2} = \frac{1}{\frac{1}{\frac{e_2}{\lambda_2 S}} + \frac{1}{\frac{e_2}{\lambda_3 S}}} \end{aligned}$$

C'est le cas des résistances thermique en parallèle

$$\frac{1}{R_{th \text{ cond } 2}} = \frac{1}{\frac{e_2}{\lambda_2 S}} + \frac{1}{\frac{e_2}{\lambda_3 S}} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}$$

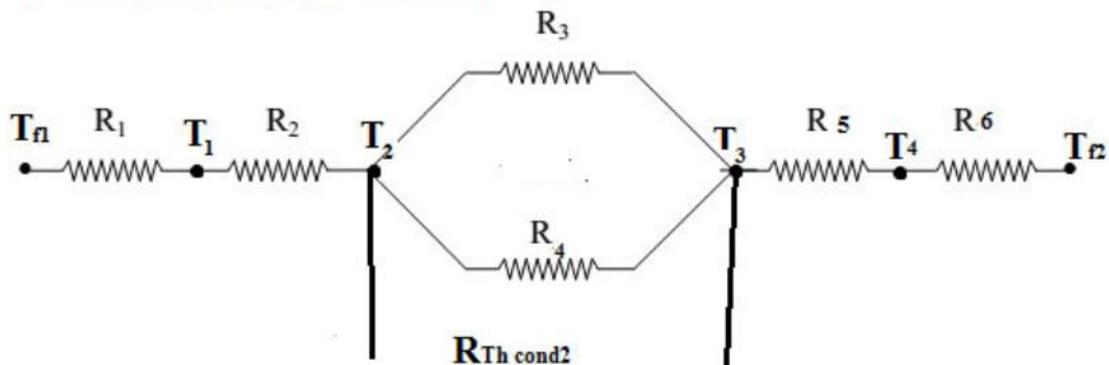
$$R_3 = \frac{e_2}{\lambda_2 S} \text{ et } R_4 = \frac{e_2}{\lambda_3 S}$$

$$\phi_{\text{cond } 3} = \frac{\lambda_4 S}{e_3} (T_3 - T_4) = \frac{(T_3 - T_4)}{\frac{e_3}{\lambda_4 S}} = \frac{(T_3 - T_4)}{R_{th \text{ cond } 1}} \Rightarrow R_{th \text{ cond } 1} = R_5 = \frac{e_3}{\lambda_4 S}$$

$$\phi_{\text{convection } 2} = h_2 S (T_4 - T_{f2}) = \frac{(T_4 - T_{f2})}{\frac{1}{h_2 S}} = \frac{(T_4 - T_{f2})}{R_{th \text{ conv } 2}}$$

$$\Rightarrow R_{th \text{ conv } 2} = R_6 = \frac{1}{h_2 S}$$

b) Le schéma électrique équivalent



$$\begin{aligned} \phi &= \phi_{\text{conv } 1} = \phi_{\text{cnd } 1} = \phi_{\text{cnd } 2} = \phi_{\text{cnd } 3} = \phi_{\text{conv } 2} \Rightarrow \frac{(T_{f1} - T_1)}{R_1} = \frac{(T_1 - T_2)}{R_2} \\ &= \frac{(T_2 - T_3)}{R_{th \text{ cond } 2}} = \frac{(T_3 - T_4)}{R_5} = \frac{(T_4 - T_{f2})}{R_6} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \phi = \frac{(T_{f1} - T_{f2})}{R_1 + R_2 + R_{th \text{ cond } 2} + R_5 + R_6} = \frac{(T_{f1} - T_{f2})}{R_{equ}}$$

$$\Rightarrow R_{equ} = R_1 + R_2 + R_{th \text{ cond } 2} + R_5 + R_6$$

$$R_{equ} = R_1 + R_2 + \frac{1}{\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}} + R_5 + R_6$$

### Exemple 5:

Calculer la perte de chaleur par conduction à travers la paroi d'un tube de cuivre de 10/12 (diamètre intérieur et extérieur en mm) et de longueur 15m. La température de la paroi interne est de 100°C, celle de la paroi externe 99,8°C.  $\lambda_{\text{cuivre}} = 330 \frac{\text{Kcal}}{\text{h.m.}^\circ\text{C}}$

### Solution:

On utilise l'équation (2.18)

$$\phi = 2\pi\lambda L \frac{(T_1 - T_2)}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} = 2\pi \cdot 330 \cdot 15 \frac{(100 - 99,8)}{\ln\left(\frac{12}{10}\right)} = \boxed{34120 \text{ Kcal/h} = 29,76 \text{ KW}}$$

### Exemple 6:

Soit une conduite de 50/60 mm de diamètre intérieure et extérieure, la longueur est de 50m. La température de la face interne est 200°C la conductivité du métal  $\lambda_1 = 52 \text{ kcal/h.m.}^\circ\text{C}$ . Elle est entourée d'une première couche de calorifuge de 3 cm d'épaisseur ( $\lambda_2 = 0.1 \text{ kcal/h.m.}^\circ\text{C}$ ), puis d'une seconde couche d'une autre calorifuge de 6cm d'épaisseur ( $\lambda_3 = 0.05 \text{ kcal/h.m.}^\circ\text{C}$ ). Cette conduite se trouve dans l'air à 20°C et le coefficient d'échange air paroi externe du calorifuge est  $h = 0.1 \text{ kcal/h.m}^2\text{.}^\circ\text{C}$ .

Calculer la quantité de chaleur perdue par heure et les températures aux différentes interfaces .

**Solution:**

$$r_1 = 2,5 \text{ cm}$$

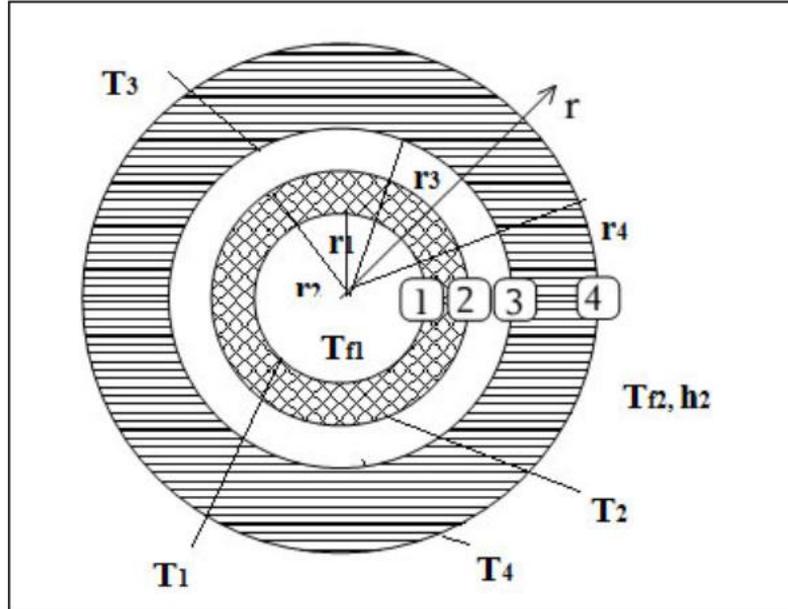
$$r_2 = 3 \text{ cm}$$

$$r_3 = 6 \text{ cm}$$

$$r_4 = 12 \text{ cm}$$

le régime est permanent

pas de source de chaleur



$$\Phi_{conv 1} = 0 \text{ parce que } T_{fi} = T_1$$

$$\Phi = \Phi_{cnd 1} = \Phi_{cnd 2} = \Phi_{cnd 3} = \Phi_{cnd 4} = \Phi_{conv 2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Phi = \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi\lambda_1 L}} = \frac{(T_3 - T_2)}{\frac{\ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)}{2\pi\lambda_2 L}} = \frac{(T_4 - T_3)}{\frac{\ln\left(\frac{r_4}{r_3}\right)}{2\pi\lambda_3 L}} = \frac{(T_4 - T_{f2})}{\frac{1}{2\pi r_4 L h_2}}$$

$$\Phi = \frac{(T_1 - T_{f2})}{\frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi\lambda_1 L} + \frac{\ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)}{2\pi\lambda_2 L} + \frac{\ln\left(\frac{r_4}{r_3}\right)}{2\pi\lambda_3 L} + \frac{1}{2\pi r_4 L h_2}} = \frac{(T_1 - T_{f2})}{\sum R_{th}}$$

$$\Phi = \frac{(200 - 20)}{\frac{\ln\left(\frac{3}{2,5}\right)}{2\pi \cdot 52,50} + \frac{\ln\left(\frac{6}{3}\right)}{2\pi \cdot 0,150} + \frac{\ln\left(\frac{12}{6}\right)}{2\pi \cdot 0,05,50} + \frac{1}{2\pi \cdot 0,12,50 \cdot 0,1}} = 2613,67 \text{ Kcal/h}$$

$$\text{On a } \Phi = \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi\lambda_1 L}} \Rightarrow T_2 = T_1 - \Phi R_{thcond1} \Rightarrow \boxed{T_2 = 199,97^\circ\text{C}}$$

$$\Phi = \frac{(T_3 - T_2)}{\frac{\ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)}{2\pi\lambda_2 L}} \Rightarrow T_3 = T_2 - \Phi R_{thcond2} \Rightarrow \boxed{T_3 = 142,27^\circ\text{C}}$$

$$\Phi = \frac{(T_4 - T_3)}{\frac{\ln\left(\frac{r_4}{r_3}\right)}{2\pi\lambda_3 L}} \Rightarrow T_4 = T_3 - \Phi R_{thcond3} \Rightarrow \boxed{T_4 = 26,87^\circ\text{C}}$$

### Exemple 7:

Un ballon en verre de conductivité thermique ( $\lambda = 0,8 \text{ W/m.}^\circ\text{C}$ ) utilisé en laboratoire contenant une huile chaude est assimilé à une sphère dont les diamètres intérieur et extérieur sont respectivement 20 cm et 21 cm. L'huile et l'air environnant possèdent des coefficients de convection respectivement de  $h_h = 15 \text{ W/m.}^\circ\text{C}$ , et  $h_a = 10 \text{ W/m.}^\circ\text{C}$ .

Calculer le flux de chaleur perdu du ballon afin de garder la température de l'huile constante à  $80^\circ\text{C}$ . On prendra la température ambiante égale à  $20^\circ\text{C}$  et en négligera les pertes par le haut du ballon.

### Solution:

C'est le cas d'une sphère creuse en contact avec deux fluides

$$\Phi = \frac{(T_h - T_a)}{\frac{1}{4\pi r_1^2 h_h} + \frac{r_2 - r_1}{4\pi \lambda r_2 r_1} + \frac{1}{4\pi r_2^2 h_a}} = \frac{(T_{f1} - T_{f2})}{R_{thcv1} + R_{thcod} + R_{thcv2}} = \frac{(T_{f1} - T_{f2})}{R_{thequ}}$$

Avec:

$$R_{thcv1} = \frac{1}{4\pi r_1^2 h_1} = \frac{1}{4\pi (0,1)^2 \cdot 15} = 0,53 \text{ }^\circ\text{C/W}$$

$$R_{thcod} = \frac{r_2 - r_1}{4\pi \lambda r_2 r_1} = \frac{0,1 - 0,105}{4\pi \cdot 0,8 \cdot 0,1 \cdot 0,105} = 0,520 \text{ }^\circ\text{C/W}$$

$$R_{thcv2} = \frac{1}{4\pi r_2^2 h_2} = \frac{1}{4\pi (0,105)^2 \cdot 10} = 0,722 \text{ }^\circ\text{C/W}$$

$$\Phi = \frac{(T_{f1} - T_{f2})}{R_{thcv1} + R_{thcod} + R_{thcv2}} = \frac{(80 - 20)}{0,53 + 0,52 + 0,722} = 46 \text{ W}$$