

Chapitre II : Interpolation polynômiale

Soit par exemple une expérience où on enregistre la distance parcourue par un objet en fonction du temps, les résultats sont donnés dans le tableau suivant :

t(sec)	0	1	2	3	4
X(m)	0	5	15	0	3

On veut par exemple calculer la position de l'objet au temps $t=2.5 \text{ sec}$ ou la vitesse de l'objet à un temps donné. Pour cela, il faut avoir une forme analytique de x en fonction de t , $X(t)$. Cette forme doit au moins coïncider avec les points donnés dans le tableau. Ensuite on peut calculer $X(2.5)$, $\int_0^4 X(t)dt$ où bien $v(t) = \frac{dX(t)}{dt}$.

Dans ce chapitre, on va considérer l'approximation de $X(t)$ par une forme polynômiale c'est-à-dire :

$$X(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_nt^n$$

Avec a_i ($i = 0, n$) sont des coefficients à déterminer.

Les polynômes que nous allons étudier diffèrent seulement par la façon de déterminer les coefficients a_i ($i = 0, n$), car pour un tableau de valeurs données le polynôme d'interpolation est unique.

2.1 Polynôme d'interpolation de Lagrange.

Soient $(n+1)$ points distincts $x_0, x_1, \dots, x_n$ et f une fonction dont les valeurs sont $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$. Alors, il existe un seul polynôme de degré inférieur ou égal à n et qui coïncide avec les points d'interpolation, i e :

$$f(x_k) = P_n(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

Ce polynôme est donné par :

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i)L_i(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + \dots + f(x_n)L_n(x)$$

$$\text{Avec} \quad L_k(x) = \sum_{i=0, i \neq k}^n \frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)} = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)} \dots \frac{(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})}{(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})} \dots \frac{(x-x_n)}{(x_k-x_n)} \quad (k=0, \dots, n)$$

$L_k(x)$ sont dits coefficients polynômes de Lagrange, ils sont orthogonaux c'est-à-dire $L_k(x_j) = 0$ et $L_k(x_k) = 1$.

Exemple : Reprenons la table donnée au début du chapitre et essayons de calculer le polynôme de Lagrange pour cette table. Notons que pour $n+1$ points le degré du polynôme est inférieure ou égal à n . Pour notre cas on a 5 points, cela nous donne un polynôme de degré inférieur ou égal à 4.

$$X(t) \approx P_4(t) = \sum_{i=0}^4 f(t_i)L_i(t) = f(t_0)L_0(t) + f(t_1)L_1(t) + f(t_2)L_2(t) + f(t_3)L_3(t) + f(t_4)L_4(t)$$

Avec les coefficients $f(t_i)$ sont les valeurs de $X(t_i)$ aux points donnés t_i , on remplace et on écrit donc :

$$X(t) \approx P_4(t) = 0 * L_0(t) + 5 * L_1(t) + 15 * L_2(t) + 0 * L_3(t) + 3 * L_4(t)$$

Ensuite, on calcule les coefficients polynômes de Lagrange :

$$L_0(t) = \sum_{i=0, i \neq 0}^4 \frac{(t-t_i)}{(t_0-t_i)} = \frac{(t-t_1)(t-t_2)(t-t_3)(t-t_4)}{(t_0-t_1)(t_0-t_2)(t_0-t_3)(t_0-t_4)}$$

Noter bien qu'il est inutile de calculer les

coefficients polynômes $L_0(t)$ et $L_3(t)$ car ils seront multipliés par zéro dans le remplacement.

$$L_1(t) = \sum_{i=0, i \neq 1}^4 \frac{(t-t_i)}{(t_1-t_i)} = \frac{(t-t_0)(t-t_2)(t-t_3)(t-t_4)}{(t_1-t_0)(t_1-t_2)(t_1-t_3)(t_1-t_4)} = \frac{(t-0)(t-2)(t-3)(t-4)}{(1-0)(1-2)(1-3)(1-4)} = -\frac{1}{6}(t^4 - 9t^3 + 26t^2 - 24t)$$

$$L_2(t) = \sum_{i=0, i \neq 2}^4 \frac{(t-t_i)}{(t_2-t_i)} = \frac{(t-t_0)(t-t_1)(t-t_3)(t-t_4)}{(t_2-t_0)(t_2-t_1)(t_2-t_3)(t_2-t_4)} = \frac{(t-0)(t-1)(t-3)(t-4)}{(2-0)(2-1)(2-3)(2-4)} = \frac{1}{4}(t^4 - 8t^3 + 19t^2 - 12t)$$

$$L_4(t) = \sum_{i=0, i \neq 4}^4 \frac{(t-t_i)}{(t_4-t_i)} = \frac{(t-t_0)(t-t_1)(t-t_2)(t-t_3)}{(t_4-t_0)(t_4-t_1)(t_4-t_2)(t_4-t_3)} = \frac{(t-0)(t-1)(t-2)(t-3)}{(4-0)(4-1)(4-2)(4-3)} = \frac{1}{24}(t^4 - 6t^3 + 11t^2 - 6t)$$

Finalement on remplace les coefficients polynômes et on obtient :

$$X(t) \approx P_4(t) = -25.75t + 50.95833t^2 - 23.25t^3 + 3.04167t^4$$

Avec : $f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}$, $f[x_1, x_2] = \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1}$,

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}, \quad f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1}, \dots \dots$$

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0}, \quad f[x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{f[x_2, x_3, x_4] - f[x_1, x_2, x_3]}{x_4 - x_1}$$

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{f[x_1, x_2, x_3, x_4] - f[x_0, x_1, x_2, x_3]}{x_4 - x_0}$$

2.4 Erreur d'interpolation

C'est l'erreur commise lorsqu'on remplace la fonction f par le polynôme d'interpolation équivalent. Elle est notée par $s(x)$ car elle varie d'un point à un autre dans l'intervalle d'interpolation. Cette erreur doit être nulle aux points d'interpolation, $s(x_i) = 0$, ($i=0, \dots, n$).

Si la fonction f est continue et $(n+1)$ fois dérivable sur l'intervalle d'interpolation $[a = x_0, b = x_n]$. Alors pour tout $x \in [a, b]$ il existe $z \in [a, b]$ tel que :

$$s(x) = |f(x) - P_n(x)| = G \frac{(x - x_i)^n}{(n+1)!} f^{(n+1)}(z)$$

Si $|f^{(n+1)}(z)| \leq M \quad \forall z \in [a, b]$ on peut écrire :

$$s(x) = |f(x) - P_n(x)| \leq G \frac{(x - x_i)^n}{(n+1)!} M$$

Dans ce cas M est majorant de la fonction $f^{(n+1)}(x)$ sur l'intervalle $[a, b]$.

Exemple : Reprenons la table donnée au début du chapitre et essayons de calculer le polynôme de Newton pour cette table. Notons que pour $n+1$ points le degré du polynôme est inférieur ou égal à n . Pour notre cas on a 5 points, cela nous donne un polynôme de degré inférieur ou égal à 4. Ecrivons les polynômes de Newton :

$$\begin{aligned} P_1(t) &= a_0 + a_1(t - t_0) \\ P_2(t) &= P_1(t) + a_2(t - t_0)(t - t_1) \\ P_3(t) &= P_2(t) + a_3(t - t_0)(t - t_1)(t - t_2) \\ P_4(t) &= P_3(t) + a_4(t - t_0)(t - t_1)(t - t_2)(t - t_3) \end{aligned}$$

■ Les a_i sont les différences divisées d'ordre i

Calculons la table des différences divisées.

t_k	$f(t_k) = f[t_k]$	DD^1	DD^2	DD^3	DD^4
0	0 = a_0				
1	5	5 = a_1			
2	15	10	2.5 = a_2		
3	0	-15	9	-5 = a_3	
4	3	3		7.1667	3.04167 = a_4

Remplaçant les a_i et les t_i par leurs valeurs dans les polynômes de Newton, on trouve :

$$P_1(t) = a_0 + a_1(t - t_0) = 0 + 5(t - 0) = 5t$$

$$P_2(t) = P_1(t) + a_2(t - t_0)(t - t_1) = 5t + 2.5(t - 0)(t - 1) = 2.5t^2 + 2.5t$$

$$P_3(t) = P_2(t) + a_3(t - t_0)(t - t_1)(t - t_2) = 2.5t^2 + 2.5t - 5(t - 0)(t - 1)(t - 2) = -5t^3 + 17.5t^2 - 7.5t$$

$$P_4(t) = P_3(t) + a_4(t - t_0)(t - t_1)(t - t_2)(t - t_3) = -5t^3 + 17.5t^2 - 6t + 3.0417(t - 0)(t - 1)(t - 2)(t - 3)$$

$P_4(t) = 3.04167t^4 - 23.25t^3 + 50.95833t^2 - 25.75t$ C'est le même polynôme que celui de Lagrange.

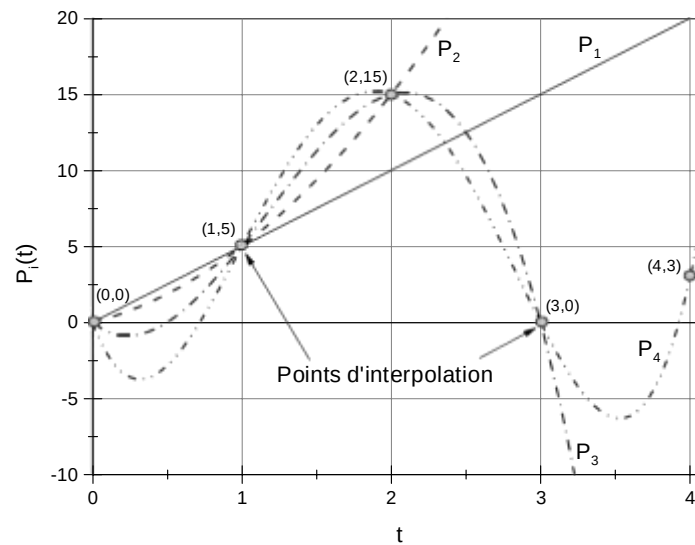


Fig. 2.1. Tracés des polynômes d'interpolation de Newton