Université De Relizane
Faculté´ des Sciences et Technologie
Département de Génie Civil

TD2 Méthodes numériques

Exercice N1

Soit les points suivants.

Fonction tabulée			
x	$f(x)$	x	$f(x)$
0,0	0,0	3,0	252,0
1,0	2,0	4,0	1040,0
2,0	36,0		

a) Obtenir le polynôme de Lagrange passant par les 3 premiers points.

b) Obtenir le polynôme de Lagrange passant par les 4 premiers points

c) Obtenir des approximations de f(1,5) à l'aide des 2 polynômes obtenus en a) et en b)

Exercice N2

Soit les points suivants

t(sec)	0	1	2	3	4
X(m)	0	5	15	0	3

a) Obtenir le polynôme de Lagrange passant par les 5 premiers points

b) Trouver le polynôme de Newton pour cette table

Exercice N3

On interpole f(x) = ln(x) par un polynôme aux noeuds $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$ et $x_4 = 5$.

a) Trouver une expression algébrique de ce polynôme en utilisant la méthode de Newton..

Solution

Exercice 1

$$\begin{aligned}
p_2(x) &= f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) \\
&= f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + f(x_2)\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \\
&= 0\frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)} + 2\frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)} + 36\frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)} \\
&= -2x(x-2) + 18x(x-1) = 2x(2-x) + 2x(9x-9) \\
&= 2x(2-x+9x-9) = 2x(8x-7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_3(x) &= f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) + f(x_3)L_3(x) \\
&= f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} \\
&\quad + f(x_2)\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + f(x_3)\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \\
&= \frac{0(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)} + \frac{2(x-0)(x-2)(x-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)} \\
&\quad + 36\frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)} + 252\frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)} \\
&= \frac{2x(x-2)(x-3)}{(1)(-1)(-2)} + \frac{36x(x-1)(x-3)}{(2)(1)(-1)} + \frac{252x(x-1)(x-2)}{(3)(2)(1)} \\
&= x(x-2)(x-3) - 18x(x-1)(x-3) + 42x(x-1)(x-2)
\end{aligned}$$

- Il suffit de prendre chacun des polynômes et de les évaluer en $x = 1{,}5$. En a), on a : $p_2(1{,}5) = 2(1{,}5)(8(1{,}5) - 7) = 15$ et pour le numéro b), on a que :

$$\begin{aligned}
p_3(1{,}5) &= (1{,}5)(1{,}5-2)(1{,}5-3) - 18(1{,}5)(1{,}5-1)(1{,}5-3) + 42(1{,}5)(1{,}5-1)(1{,}5-2) \\
&= 1{,}125 + 20{,}25 - 15{,}75 = 5{,}625
\end{aligned}$$

Exercice 2

$$\boldsymbol{X(t) \approx P_4(t) = 0 * L_0(t) + 5 * L_1(t) + 15 * L_2(t) + 0 * L_3(t) + 3 * L_4(t)}$$

Ensuite, on calcule les coefficients polynômes de Lagrange :

$L_0(t) = \sum_{i=0,i\neq 0}^{4} \frac{(t-t_i)}{(t_k-t_i)} = \frac{(t-t_1)}{(t_0-t_1)}\frac{(t-t_2)}{(t_0-t_2)}\frac{(t-t_3)}{(t_0-t_3)}\frac{(t-t_4)}{(t_0-t_4)}$ Noter bien qu'il est inutile de calculer les coefficients polynômes $L_0(t)$ et $L_3(t)$ car ils seront multipliés par zéro dans le remplacement.

$$L_1(t) = \sum_{i=0,i\neq 1}^{4} \frac{(t-t_i)}{(t_k-t_i)} = \frac{(t-t_0)}{(t_1-t_0)}\frac{(t-t_2)}{(t_1-t_2)}\frac{(t-t_3)}{(t_1-t_3)}\frac{(t-t_4)}{(t_1-t_4)} = \frac{(t-0)}{(1-0)}\frac{(t-2)}{(1-2)}\frac{(t-3)}{(1-3)}\frac{(t-4)}{(1-4)} = -\frac{1}{6}(t^4 - 9t^3 + 26t^2 - 24t)$$

$$L_2(t) = \sum_{i=0,i\neq 2}^{4} \frac{(t-t_i)}{(t_k-t_i)} = \frac{(t-t_0)}{(t_2-t_0)}\frac{(t-t_1)}{(t_2-t_1)}\frac{(t-t_3)}{(t_2-t_3)}\frac{(t-t_4)}{(t_2-t_4)} = \frac{(t-0)}{(2-0)}\frac{(t-1)}{(2-1)}\frac{(t-3)}{(2-3)}\frac{(t-4)}{(2-4)} = \frac{1}{4}(t^4 - 8t^3 + 19t^2 - 12t)$$

$$L_4(t) = \sum_{i=0,i\neq 4}^{4} \frac{(t-t_i)}{(t_k-t_i)} = \frac{(t-t_0)}{(t_4-t_0)}\frac{(t-t_1)}{(t_4-t_1)}\frac{(t-t_2)}{(t_4-t_2)}\frac{(t-t_3)}{(t_4-t_3)} = \frac{(t-0)}{(4-0)}\frac{(t-1)}{(4-1)}\frac{(t-2)}{(4-2)}\frac{(t-3)}{(4-3)} = \frac{1}{24}(t^4 - 6t^3 + 11t^2 - 6t)$$

Finalement on remplace les coefficients polynômes et on obtient :

$$\boldsymbol{X(t) \approx P_4(t) = -25.75t + 50.95833t^2 - 23.25t^3 + 3.04167t^4}$$

- **2**

$$P_1(t) = a_0 + a_1(t - t_0)$$
$$P_2(t) = P_1(t) + a_2(t - t_0)(t - t_1)$$
$$P_3(t) = P_2(t) + a_3(t - t_0)(t - t_1)(t - t_2)$$
$$P_4(t) = P_3(t) + a_4(t - t_0)(t - t_1)(t - t_2)(t - t_3)$$

Les a_i sont les différences diviséees d'ordre i

Calculons la table des différences divisées.

t_k	$f(t_k) = f[t_k]$	DD^1	DD^2	DD^3	DD^4
0	$0 = a_0$				
1	5	$5 = a_1$	$2.5 = a_2$		
2	15	10	-12.5	$-5 = a_3$	$3.04167 = a_4$
3	0	-15	9	7.1667	
4	3	3			

Remplaçant les a_i et les t_i par leurs valeurs dans les polynômes de Newton, on trouve :

$P_1(t) = a_0 + a_1(t - t_0) = 0 + 5(t - 0) = 5t$

$P_2(t) = P_1(t) + a_2(t - t_0)(t - t_1) = 5t + 2.5(t - 0)(t - 1) = 2.5t^2 + 2.5t$

$P_3(t) = P_2(t) + a_3(t - t_0)(t - t_1)(t - t_2) = 2.5t^2 + 2.5t - 5(t - 0)(t - 1)(t - 2) = -5t^3 + 17.5t^2 - 7.5t$

$P_4(t) = P_3(t) + a_4(t - t_0)(t - t_1)(t - t_2)(t - t_3) = -5t^3 + 17.5t^2 - 6t + 3.0417(t - 0)(t - 1)(t - 2)(t - 3)$

$P_4(t) = 3.04167t^4 - 23.25t^3 + 50.95833t^2 - 25.75t$

Exercice 3

$$\begin{aligned}
p_4(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\
&\quad + a_4(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \\
&= f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\
&\quad + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\
&\quad + f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \\
&= 0{,}693\,1471\,806(x - 1) - 0{,}143\,841\,0361(x - 1)(x - 2) \\
&\quad + 0{,}028\,316\,505\,97(x - 1)(x - 2)(x - 3) - 0{,}004\,860\,605\,018(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4) \\
p_4(x) &= -1{,}267\,382\,809 + 1{,}679\,182\,105x - 0{,}483\,861\,2475x^2 + 0{,}076\,922\,556\,15x^3 \\
&\quad - 0{,}004860605018x^4
\end{aligned}$$