Centre universitaire de relizane
Institut des sciences et technologies
2ème année ST
Module : Méthodes Numériques (travaux pratiques)

TP 3 : Résolution d'une équation F(x) = 0
(**Méthode point fixe et la sécante**)

1. Méthode de point fixe (ou d'itération)

L'intérêt des méthodes de type point fixe est qu'elles peuvent aussi s'appliquer à des systèmes de plusieurs équations à plusieurs inconnues.
Son principe est basé sur la construction d'une suite itérative approchant de plus en plus la racine exacte, son premier élément (appelé initialisation) pouvant être n'importe quel point de l'intervalle de travail [a, b].
La méthode du point fixe s'applique à des équations de la forme f(x) = x.
On peut toujours écrire l'équation f(x) = 0 sous une forme équivalente de ce type.
On se place dans le cas où la fonction : $f : [a, b] \to IR$, vérifie qui suit

- f est continue et dérivable sur [a, b]
- f prend ses valeurs dans [a, b]
- $\exists\ M \in]a, b[\ :\ \forall\ x \in [a, b]\quad |f'(x)| \le M$

Lorsque f vérifie les trois hypothèses précédentes il existe une unique racine c de l'équation f(x) = x, appelée point fixe de f.
Considérons en effet la fonction définie par : g(x) = f(x) + x

1.1 Algorithme de la méthode de point fixe

On construit la suite des itérés de la manière suivante :

- On fixe un point x_0 quelconque de [a, b].
- Puis on définit : $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$, ……, $x_{n+1} = f(x_n)$.
- Fixons $\varepsilon>0$ pour que x_n soit une valeur approchée de c à ε près, il suffit que :

$$n \ge \frac{\ln(\varepsilon) - \ln|b-a|}{\ln(M)}$$

Exemple :

Soit la fonction $f(x) = 1 - x^3/4$, on constate que cette expression ne s'annule que pour une seule valeur réelle de x, proche de 1.59

Solution :

Il est facile d'obtenir une approximation de ce zéro avec une erreur absolue de l'ordre de 10^{-5}.
Il suffit pour cela d'appliquer la méthode du point fixe en choisissant
$g(x) = x + f(x) = x + 1 - x^3/4$ et d'exécuter le programme suivant :

```
>> x(1)=1.59;
>> for  n=1:50
        x(n+1)=x(n) + 1 - x(n)^3/4;
end
>>x
```

Si l'on veut une précision supérieure, il suffit d'exécuter le programme suivant :

```
>> x(1)=1.59;
>> n=1;
>> f=1;
>> while abs(f) > 1e-14
        f = 1 - x(n)^3/4;
        x(n+1)=x(n) + f;
        n=n+1;
end
>> x
```

2. Méthode de la sécante

La méthode de la sécante assimile le graphe de f(x) à une droite.
Soient x_0 et x_1 deux approximations de la racine r d'une équation f(x) = 0. Si, dans un voisinage de l'intervalle $[x_0, x_1]$ on remplace le graphe de f(x) par une droite qui joint les points $(x_0, f(x_0))$ et $(x_1, f(x_1))$ on peut espérer trouver une nouvelle approximation de la racine cherchée en assimilant celle-ci au point x_2 où la droite coupe l'axe des x.
Il est facile, à partir de l'équation de la droite, d'obtenir x_2, on a :

$$x_2 = x_1 - f(x_1)\frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)}$$

Ensuite, partant de x_1 et x_2, on calcule x_3, etc.

2.1 Algorithme de la méthode de la sécante

L'algorithme de la méthode de la sécante est le suivant :

- Fixer x_0 et x_1.
- Calculer $x_{n+2} = x_{n+1} - f(x_{n+1})\dfrac{x_{n+1} - x_n}{f(x_{n+1}) - f(x_n)}$ pour n = 0, 1, 2, . . .

Exemple 1 :

On se propose de résoudre l'équation x − 0.2sin(x) − 0.5 = 0 par la méthode de la sécante à l'aide du programme écrit en Matlab.

Solution :

```
>>  x(1) = 0;
>>  x(2) = 1;
>>  f = inline('x - 0.2*sin(x) - 0.5');
>>  for n = 1:8
        F = f(x(n+1));
        x(n+2) = x(n+1) - F*(x(n+1)-x(n))/(F-f(x(n)));
    end
>>  format long
>>  disp( [x' f(x)'] )
```

Exemple 2 :

Soit la fonction $f(x) = 16(\sin(x)\cos(x))^2 - 4\sin(2x) + 1$.
Résoudre f(x) = 0, pour que x(1) = pi/11 et x(2) = pi/13 et n = 39 par la méthode de la sécante à l'aide du programme écrit en Matlab.