Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
Université de Relizane
Faculté de la Technologie
Département du Génie Mécanique

Mécanique de la rupture et fatigue

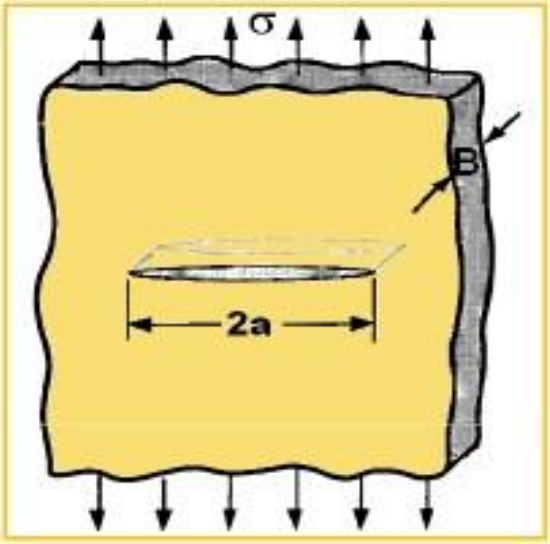
Chapitre II Mécanique Linéaire Elastique de la rupture (MLER)

2.1 Critère énergétique

- La propagation de la fissure aura lieu quand l'énergie de propagation dépasse la résistance du matériau

- **Griffith** (1920) a proposé un critère énergétique de rupture : taux de changement de l'énergie potentielle autour de la zone de fissure

$$G = \frac{\pi \sigma^2 a}{E}$$



a: demi-longueur de fissure
E : module d'Young
σ : contrainte nominale (loin de la fissure)

A l'état critique : $G_c = \frac{\pi \sigma_f^2 a_c}{E}$

Quand $G = G_c = Cste \rightarrow$ la contrainte de rupture σ_f varie en $1/\sqrt{a}$

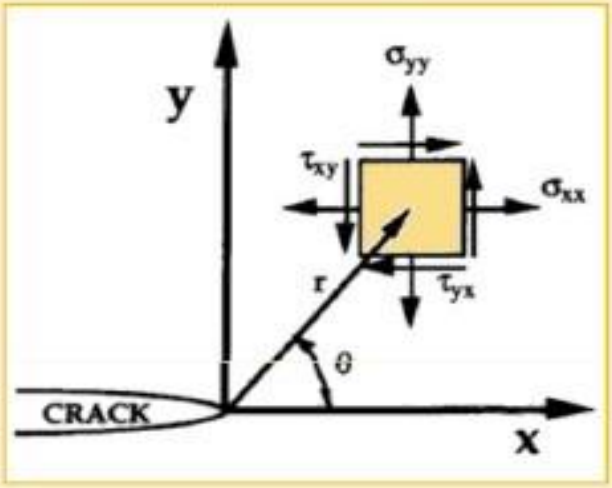
G_c : joue le rôle de force de résistance à la rupture du matériau
G : joue le rôle de force agissante pour provoquer la rupture

2.2 Critère d'intensité des contraintes

- Considérons un point matériel au voisinage d'une fissure
- Le matériau supposé élastique
- Hypothèse de contraintes planes

- Les composantes de contraintes sont proportionnelles à un facteur K_I
- Pour le cas de la figure, K_I est donné par :

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a}$$



- La rupture sera causée si : $K_I = K_{Ic}$

K_{Ic} : *facteur d'intensité de contraintes critique*

- *La comparaison des deux critères donne :*

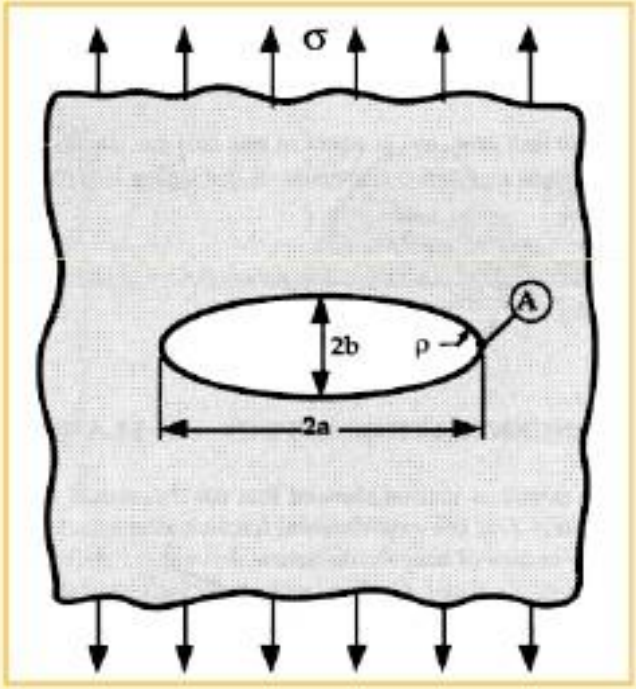
$$G = \frac{K_I^2}{E}$$

2.3 Concentration des contraintes au voisinage des défauts

- Inglis (1913) a été le premier à montrer l'effet de concentration de contraintes
- Plaque avec trou elliptique (2a, 2b), largeur de plaque >> 2a
- La contrainte en pointe de fissure (point A) :

$$\sigma_A = \sigma\left(1+\frac{2a}{b}\right)$$

- Facteur de concentration : $\sigma_A / \sigma = K_f$
- si ***a=b*** → $k_f = 3$
- si $a/b \to \infty$ Inglis propose : $\sigma_A = \sigma\left(1+2\sqrt{\frac{a}{\rho}}\right)$
- $\rho = \frac{b^2}{a}$ rayon en pointe de fissure
- si a >> b → $\sigma_A = 2\sigma\sqrt{\frac{a}{\rho}}$



2.4 Equilibre énergétique de Griffith

- Considérons une plaque soumise à une contrainte constante σ
- La plaque contient une fissure de longueur 2a
- La largeur de plaque >> 2a
- Hypothèse de contraintes planes

- L'équilibre énergétique selon Griffith : $$\frac{dE}{dA} = \frac{d\Pi}{dA} + \frac{dW_S}{dA} = 0$$

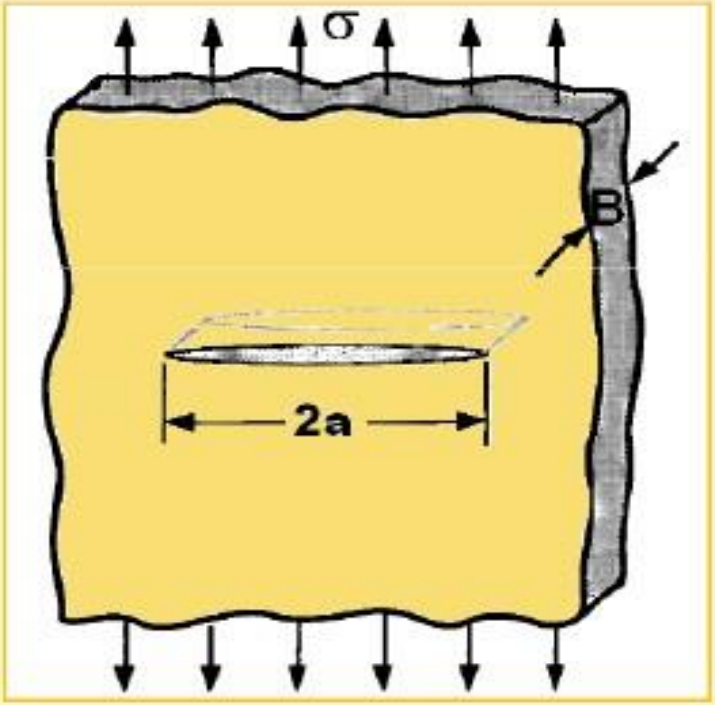
  - ***A*** *: aire de fissure :* ***A= 2 a B***
  - ***E*** *: énergie totale*
  - ***Π*** *: énergie potentielle*
  - ***Ws*** *: travail nécessaire pour la progression du défaut*

- Griffith montre que : $$\Pi = \Pi_0 - \frac{\pi\sigma^2 a^2 B}{E}$$

  - Π_0 *: énergie potentielle de plaque sans défaut*
  - ***B*** *: épaisseur de plaque*

- ***Ws*** *donné par :* $$W_S = 4aB\gamma_S$$

  - γ_S *: énergie surfacique du matériau*



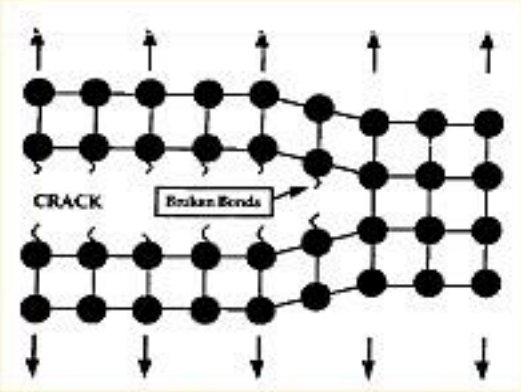
- on obtient ainsi $-\frac{d\Pi}{dA} = \frac{\pi\sigma^2 a}{E}$ et $\frac{dW_S}{dA} = 2\gamma_S$
- L'équation d'équilibre énergétique de Griffith donne : $\sigma_f = \sqrt{\frac{2E\gamma_S}{\pi a}}$

(valable pour les matériaux fragiles)

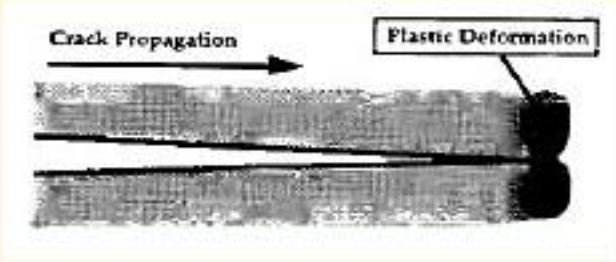
- Irwin a apporté une correction de la contrainte de rupture pour le cas de structures métalliques (rupture ductile):

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{2E(\gamma_S + \gamma_P)}{\pi a}}$$

  - γ_p : *travail plastique par unité de surface*



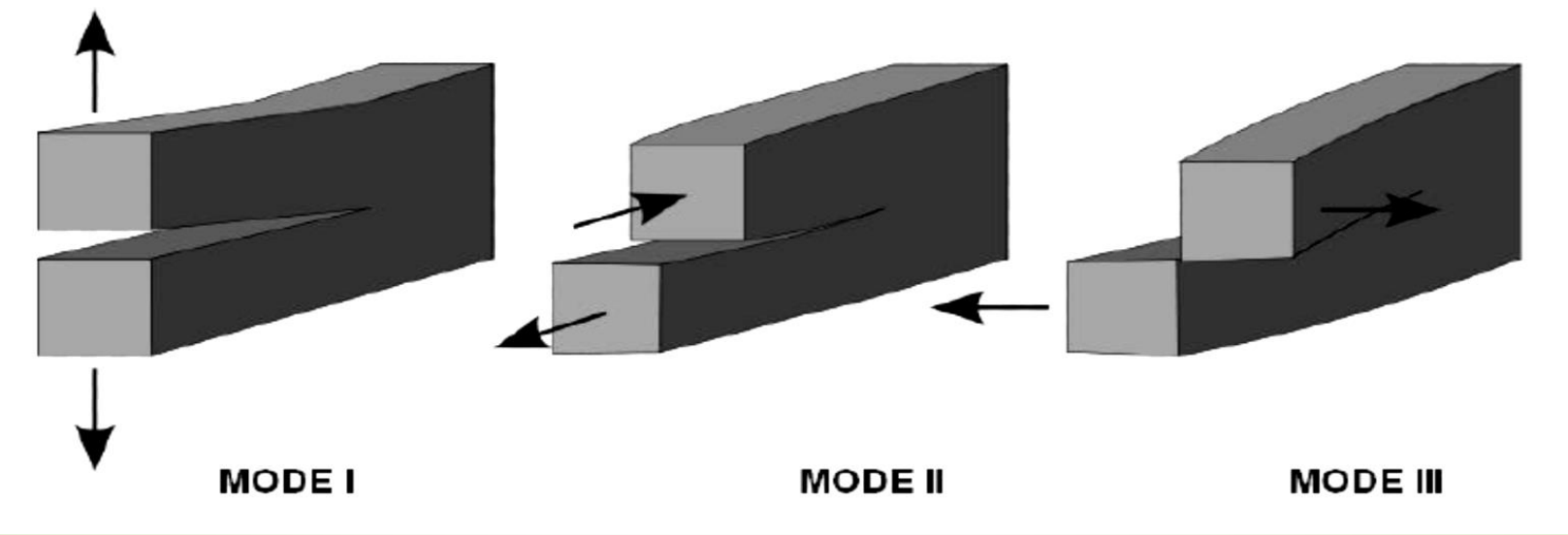
Rupture fragile : $W_f = \gamma_s$



Rupture ductile : $W_f = \gamma_s + \gamma_p$

5. Cinématiques de rupture et champs des contraintes

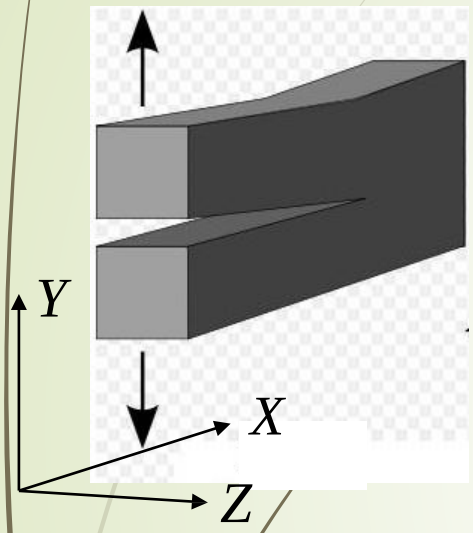
- Trois modes de chargements pouvant s'appliquer à une fissure:



- Pour un mode mixte, on a en général:

$$\sigma_{ij}^{tot} = \sigma_{ij}^{(I)} + \sigma_{ij}^{(II)} + \sigma_{ij}^{(III)}$$

2.5.1 Champs de contraintes au voisinage du fond de fissure en mode I

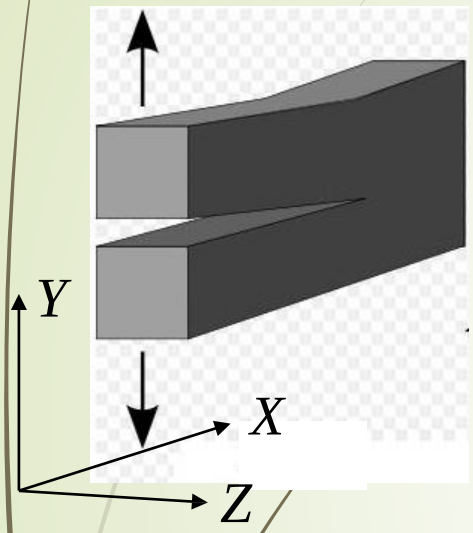


Mode I: Ouverture

Contraintes

$$
\begin{cases}
\sigma_{xx} = \dfrac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right] \\
\sigma_{yy} = \dfrac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right] \\
\tau_{xy} = \dfrac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \\
\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}), \quad \text{En déformation plane} \\
\sigma_{zz} = 0, \quad \text{En contraintes planes}
\end{cases}
$$

2.5.1 Champs des déplacements au voisinage du fond de fissure en mode I

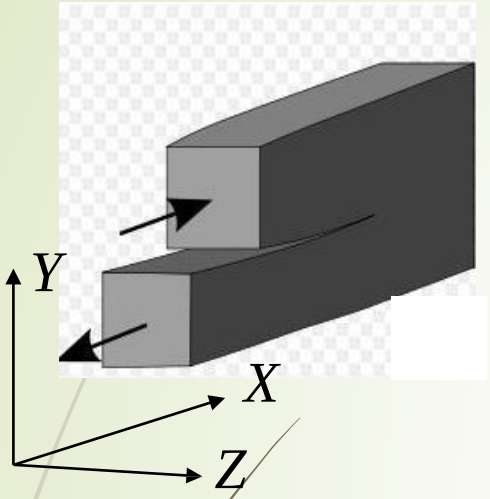


Mode I: Ouverture

Déplacements

$$
\begin{cases}
u_x = \dfrac{K_I}{2\mu}\sqrt{\dfrac{r}{2\pi}}\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\left[\kappa - 1 + 2\sin^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right] \\
u_y = \dfrac{K_I}{2\mu}\sqrt{\dfrac{r}{2\pi}}\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\left[\kappa + 1 - 2\cos^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right] \\
\text{avec} \quad \kappa = 3 - 4\nu \qquad \text{En déformation plane} \\
\text{et} \quad U_z = 0 \qquad \text{En déformation plane} \\
\text{avec} \quad \kappa = \dfrac{3-\nu}{1+\nu} \qquad \text{En contraintes planes}
\end{cases}
$$

2.5.2 Champs des contraintes au voisinage du fond de fissure en mode II

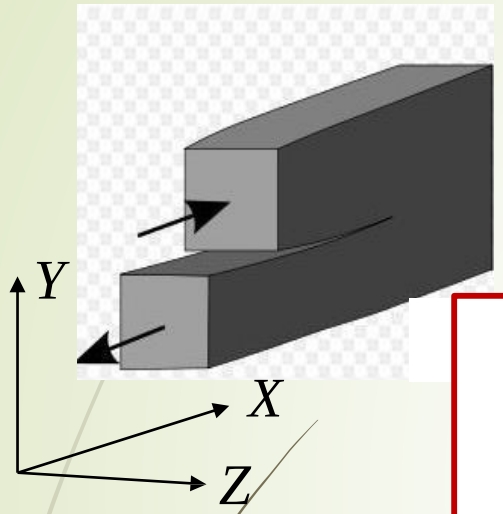


Mode II: Glissement plan

Contraintes

$$
\begin{cases}
\sigma_{xx} = -\dfrac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[2 + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right] \\
\sigma_{yy} = \dfrac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \\
\tau_{xy} = \dfrac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right] \\
\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}), \quad \text{En déformation plane} \\
\sigma_{zz} = 0, \quad \text{En contraintes planes}
\end{cases}
$$

2.5.2 Champs des déplacements au voisinage du fond de fissure en mode II



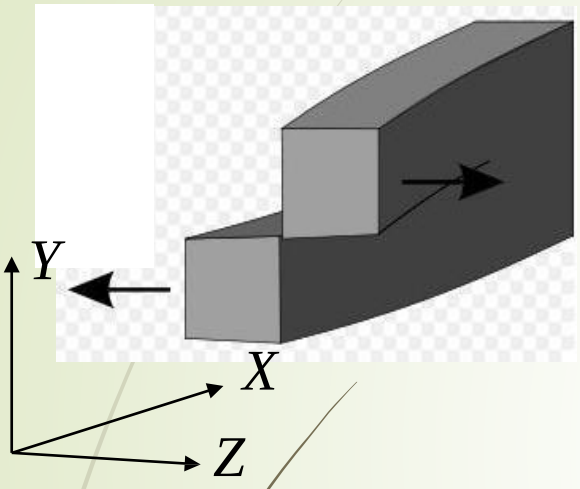
Mode II: Glissement plan

Déplacements

$$
\begin{cases}
u_x = \dfrac{K_{II}}{2\mu}\sqrt{\dfrac{r}{2\pi}}\,\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\left[\kappa + 1 + 2\cos^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right] \\
u_y = -\dfrac{K_{II}}{2\mu}\sqrt{\dfrac{r}{2\pi}}\,\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\left[\kappa - 1 - 2\sin^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right] \\
\text{avec} \quad \kappa = 3 - 4\nu \qquad \text{En déformation plane} \\
\text{et} \quad U_z = 0 \qquad \text{En déformation plane} \\
\text{avec} \quad \kappa = \dfrac{3-\nu}{1-\nu} \qquad \text{En contraintes planes}
\end{cases}
$$

μ: Module de cisaillement

2.5.3 Champs des contraintes et des déplacements au voisinage du fond de fissure en mode III



Mode III: Glissement anti-plan

Contraintes

$$\begin{cases} \tau_{xz} = -\dfrac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \\ \tau_{yz} = \dfrac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \end{cases}$$

Déplacements

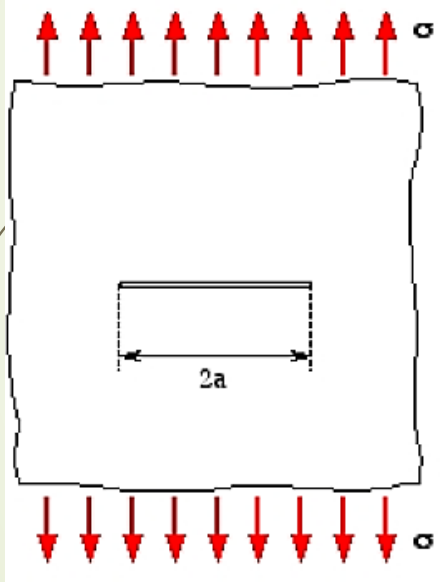
$$\begin{cases} u_z = \dfrac{2K_{III}}{\mu}\sqrt{\dfrac{r}{2\pi}} \sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \end{cases}$$

μ: Module de cisaillement

2.6 Expression utiles du facteur d'intensité de contraintes

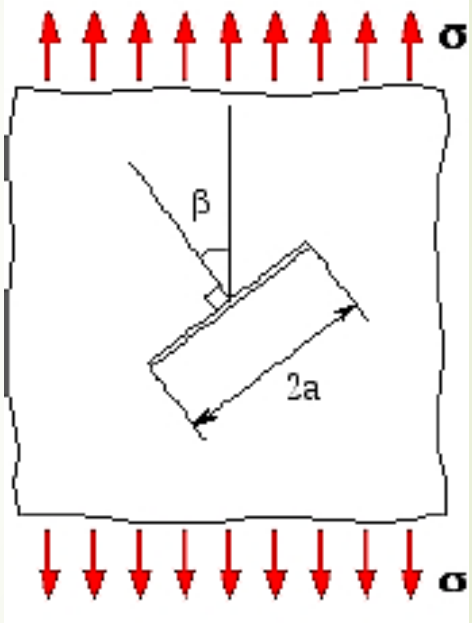
Cas d'une fissure dans un milieu infini

Fissure de longueur 2a dans une plaque infinie
Problème de Griffith



$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a}$$

Fissure inclinée de longueur 2a dans une plaque infinie



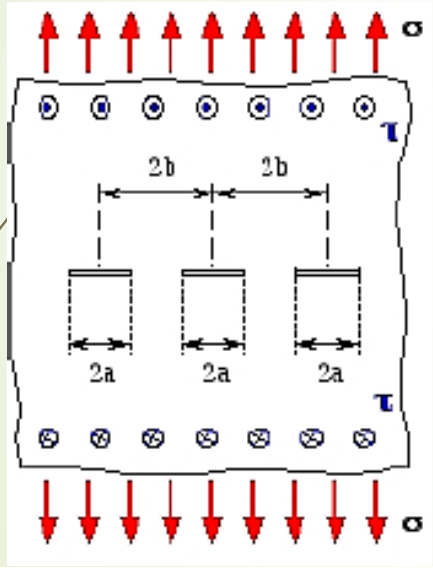
$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \cos^2 \beta$$

$$K_{II} = \sigma \sqrt{\pi a} \cos \beta \sin \beta$$

2.6 Expression utiles du facteur d'intensité de contraintes

Cas d'une fissure dans un milieu infini

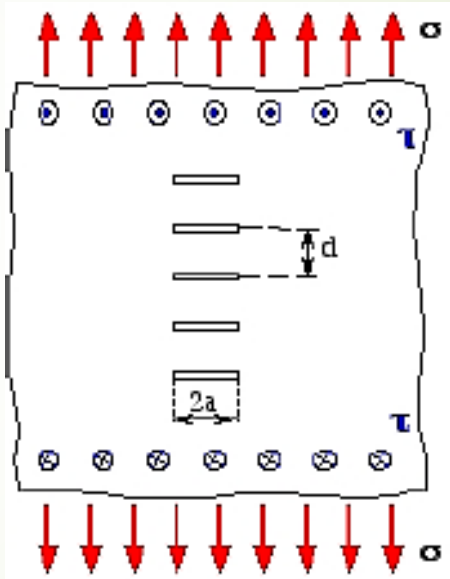
Fissures de longueur 2a distantes de 2b dans une plaque infinie



$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a}\sqrt{\frac{2b}{\pi a}\tan\left(\frac{\pi a}{2b}\right)}$$

$$K_{II} = \tau\sqrt{\pi a}\sqrt{\frac{2b}{\pi a}\tan\left(\frac{\pi a}{2b}\right)}$$

Fissures parallèles de longueur 2a dans une plaque infinie



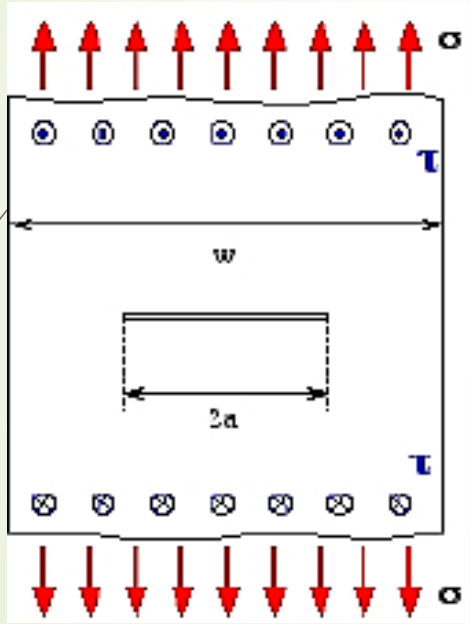
$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a}\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi a}{d}\right)^2 + \frac{3}{8}\left(\frac{\pi a}{d}\right)^4\right]$$

$$K_{II} = \tau\sqrt{\pi a}\sqrt{\frac{d}{\pi a}\tan\left(\frac{\pi a}{d}\right)}$$

2.6 Expression utiles du facteur d'intensité de contraintes

Cas d'une fissure dans un milieu infini

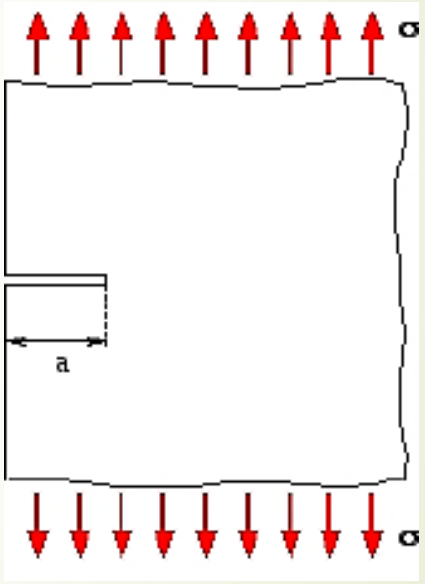
Fissures de longueur 2a dans une plaque finie de largeur w



$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a}\sqrt{\cos\frac{\pi a}{w}}$$

$$K_{II} = \tau\sqrt{\pi a}\sqrt{\frac{w}{\pi a}\tan\frac{\pi a}{w}}$$

Fissure latérale de longueur a dans une plaque semi-infinie

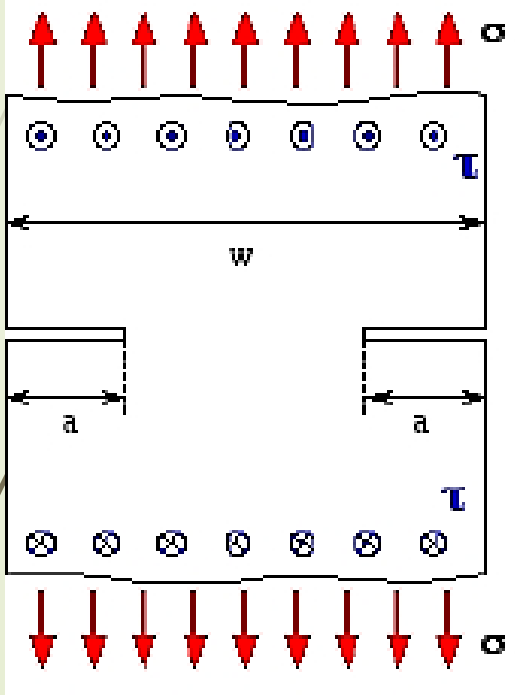


$$K_I = 1.122\sigma\sqrt{\pi a} \simeq 2\sigma\sqrt{a}$$

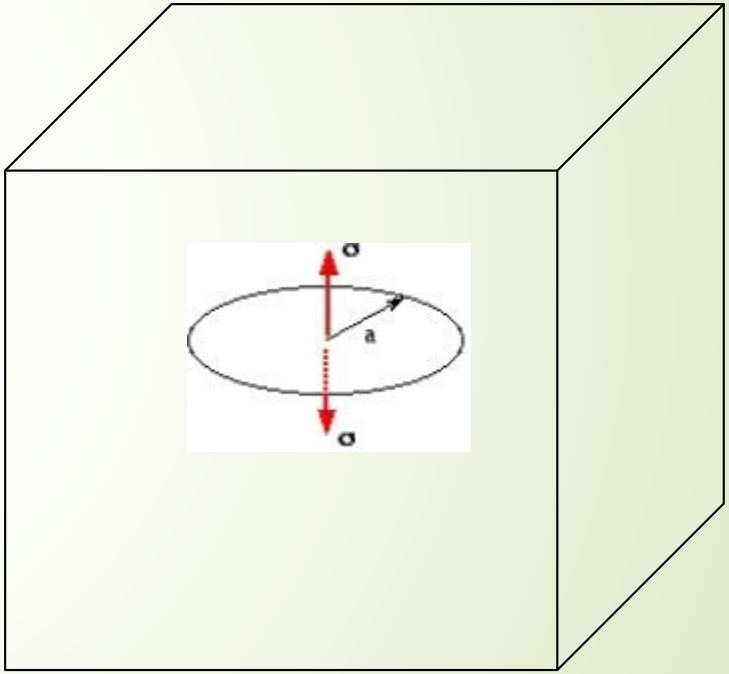
2.6 Expression utiles du facteur d'intensité de contraintes

Cas d'une fissure dans un milieu infini

Double fissure débouchante dans une plaque de largeur w



Fissure circulaire dans un massif infini



$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a}\left[1+1.122\cos^2\left(\frac{\pi a}{w}\right)\right]\sqrt{\frac{w}{\pi a}\tan\left(\frac{\pi a}{w}\right)}$$

$$K_{II} = \tau\sqrt{\pi a}\sqrt{\frac{w}{\pi a}\tan\left(\frac{\pi a}{w}\right)}$$

$$K_I = \frac{2\sigma}{\pi}\sqrt{\pi a}$$

Fin du chapitre II