Chapitre3 les lois de probabilités

1 La loi de probabilité d'une variable aléatoire X

1.1 Définition

La loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle X est la loi de probabilité P définie sur l'espace (R,B) par :

$$\forall\, B \in \beta \;\; P(B) = \Pr\left(\frac{\omega}{X(\omega)} \in \beta\right) = P(X^{-1}(B))$$

1.2 La Fonction de répartition

La fonction de répartition de la variable aléatoire réelle X est la fonction (application) F de R dans R définie par :

$$\forall\, x \in R \; F(x) = P(X < x)$$

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$$

Exemple Le lancer de dé

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$$

P(1)=P(2)=P(3)=P(4)=P(5)=P(6)=$\frac{1}{6}$

X	1	2	3	4	5	6
P	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6
F(X)	1/6	2/6	3/6	4/6	5/6	6/6=1

2 La Densité de probabilité :

Elle est définie par f ou :

$$f(x).\,dx = P(x \leq X \leq x + dx)$$

3 Loi de probabilité discrète

3.1 Définition d'une variable discrète :

Une variable aléatoire discrète prend ses valeurs sur une ensemble fini ou dénombrable de points , on énumère les valeurs x_i appartenant a R , ainsi que leur probabilite associé :

$$P(X = x_i\,) = P_i \;\; 0 \leq P_i \;\leq 1 \qquad \sum_i P_i \;= 1$$

3.2 Esperance mathématique et variance :

$$E(X) = \sum_i x_i\, P_i\,, \qquad\qquad Var(X) = (\sum_i x_i{}^2\, P_i\,) - [E(X)]^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$$

3.3 Domaine d'utilisation

Les lois discrètes sont utilisées pour modéliser les resultats des jeux de hasard, les sondages d'opinion, les phénomènes biologiques ….les plus utilisées sont la loi uniforme, la loi binomiale, loi hypergéométrique, loi de poisson.

3.4 Loi binomiale :

3.4.1 Définition

C'est une expérience dont le résultat ne peut prendre que deux valeurs appelé par convention :

- Succès p
- Echec q

3.4.2 Condition d'utilisation

Les épreuves de la même expérience sont indépendantes

Deux valeurs possibles : succès et échec

La probabilité p de succès est constante à chaque épreuve :

p(p(X=1)=p)

La probabilité d'échec est également constante

p(p(X=0)=q=1-p)

3.4.3 Formule

La Probabilité d'obtenir k succès au cours de n épreuve est :

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=\binom{n}{k}p^kq^{n-k} \quad ;$$

$$\binom{n}{k}=C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Remarque $C_n^0 = C_n^n = 1$

La variable X est appelé variable binomiale, la loi de la variable X est appelé loi binomiale de paramètres (n,p)notée B(n,p)

3.4.4 Moment (Esperance mathématique et variance) :

E(X)=np Var(X) =np(1-p)=npq

Exemple : un chasseur tire sur un lapin, il a une chance sur cinq de le toucher.

Soit deux chasseurs tirent indépendamment sur le lapin :

a) Quelle est la probabilité du nombre de coup de fusil reçu par le lapin ?
b) Quelle est la probabilité que le lapin reçoive 0,1,2 coup de fusil ?
c) Calculer l'espérance mathématique et la variance.

Solution :

(1)

4 Lois de probabilité continue

4.1 Généralités

Une variable aléatoire continue prend ses valeurs sur un ensemble infini non dénombrable de points, elle décrit par exemple la durée de vie d'une batterie de voiture, l'heure d'arrivée des voitures à un péage donné d'autoroute... Il existe une fonction f non négative, définie pour toute valeur x appartenant à R et vérifiant, pour toute partie A de R, la propriété

$$\mathbf{Pr(X \in A)} = \int_{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{f(x)dx}$$

et telle que $\int_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{f(x)dx = 1}$

La fonction f est la densité de probabilité de la variable aléatoire X. La fonction de répartition de la variable aléatoire X est définie par :

$$\mathbf{F(a) = Pr(X < a)} = \int_{-\infty}^{\boldsymbol{a}} f(x)dx$$

Pour toutes les valeurs a et b appartenant à $\mathbb{R}$, on a donc la relation :

$$\mathbf{Pr(a \leq X < b)} = \boldsymbol{F(b) - F(a)}$$

4.2 Loi de Laplace gauss ou loi normale

4.2.1 LOI DE PROBABILITE

Une loi de probabilité est un modelé représentant au mieux une distribution de fréquences d'une variable aléatoire. Dans le cas d'une variable continue, cette distribution est continue.

Dans le cas d'une variable discrète, on obtient la loi de probabilité (ou distribution de probabilité) d'une variable aléatoire en associant sa probabilité a chacune des valeurs possibles de cette variable.

4.2.2 HISTORIQUE

C'est au XVIIe siècle que commença l'étude systématique des problèmes liés aux phénomènes aléatoires.
L'éminent physicien Galilée essaya déjà d'étudier les erreurs des mesures physiques, considérant celles-ci comme aléatoires et estimant leur probabilité. A cette époque apparut aussi la théorie des assurances, basée sur l'analyse des lois régissant des phénomènes aléatoires tels que la morbidité, la mortalité, les accidents, etc.

Cependant, les statisticiens de l'époque étudièrent tout d'abord des phénomènes plus simples, tels que les jeux de hasard. Ceux-ci encore aujourd'hui fournissent des modèles particulièrement simples et clairs de phénomènes aléatoires, permettant d'observer et d'étudier les lois spécifiques qui les régissent ; de plus, la possibilité de répéter de nombreuses fois une même expérience assure une vérification expérimentale de ces lois.

4.2.3 Domaines Et Limitations de la loi normale

La loi normale est la plus connue des lois de probabilité continues. Elle joue un rôle central dans la théorie des probabilités et dans ses applications statistiques.
Beaucoup de mesures, telles que la taille ou le poids d'individus, le diamètre d'une pièce de machine, les resultats à un test du QI suivent approximativement une loi normale.

La loi normale est fréquemment utilisée comme approximation, soit lorsque la normalité est attribuée a une distribution dans la construction d'un modèle, soit lorsqu'une distribution connue est remplacée par une distribution normale, de même espérance mathématique et de même variance. Elle est notamment utilisée pour l'approximation de la loi du chi-carre, de la loi de Student, de même que de lois de probabilité discrètes telle que la loi binomiale et la loi de Poisson.

La loi normale est également un élément fondamental de la théorie d'échantillonnage, ou son rôle est prépondérant notamment dans l'étude de la corrélation, l'analyse de régression, l'analyse de variance et l'analyse de covariance.

4.2.4 Définition

Une variable aléatoire réel X, prenant ses valeurs dans R , suit une loi de Laplace Gauss ou loi normale de paramètres m et σ si sa densité de probabilité est donnée par :

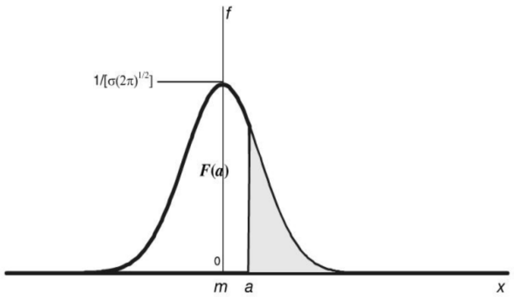
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\,\pi}}\, e^{\frac{-(x-m)^2}{2\,\sigma^2}} \;\; ; \;\; \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

Cette loi est notée en générale N (m,S^2) , on dit qu'une variable suivant une tel loi est une variable normale ou gaussienne

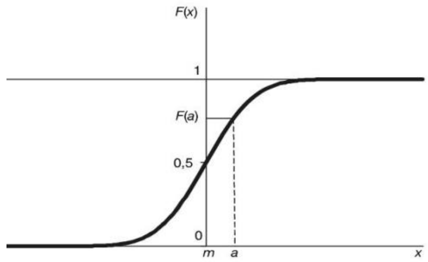
4.2.5 La Fonction de répartition :

$$P(X < a\,) = \frac{1}{s\sqrt{2\,\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{\frac{-(x-m)^2}{2\,\sigma^2}} dx$$

Cette intégrale n'ayant pas d'expression mathématique simple, des tables donnent les valeurs de la fonction de répartition. Sur la courbe représentant la densité de probabilité, la valeur de F(a) est représentée par la partie non hachurée. Cette courbe a un axe de symétrie vertical pour x=m et du fait de sa forme, elle est souvent appelée « courbe en cloche ».



Densité de la loi normale.



Fonction de répartition de la loi normale.

4.2.6 Moments :

Esperance et variance : E(X)=m ; Var(X) $=\sigma^2$

4.2.7 Variable aléatoire centrée réduite :

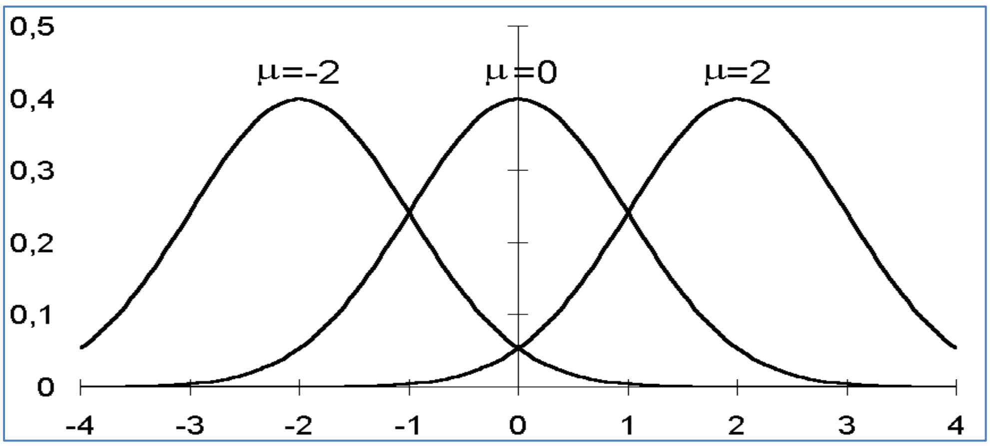
La variable centre réduite associé à la variable aléatoire X est la variable $U = \frac{X-m}{\sigma}$

La variable U suit la loi normale N(0,1) dont les paramètres sont m=0 et σ=1.

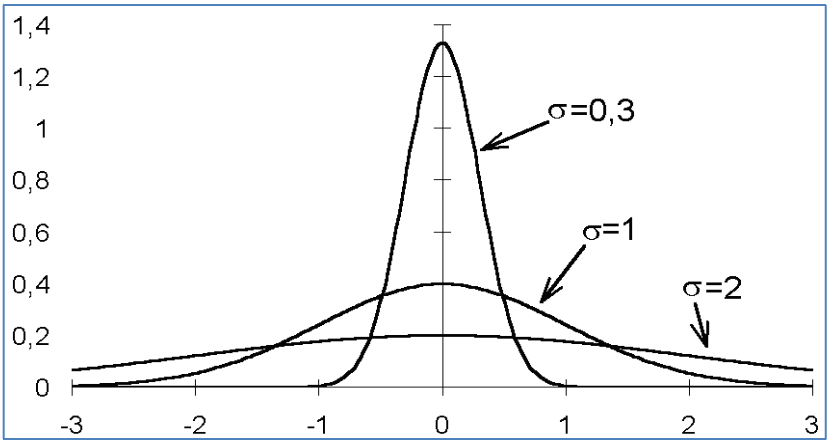
4.2.7.1 Changement de variable :

$$U = \frac{X-m}{\sigma} \text{ et } X = \sigma U + m$$

Permettant de passer d'une variable a l'autre.



Exemple de loi normale avec moyennes différentes même variance

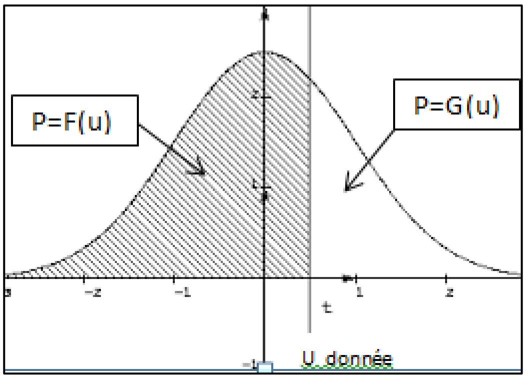


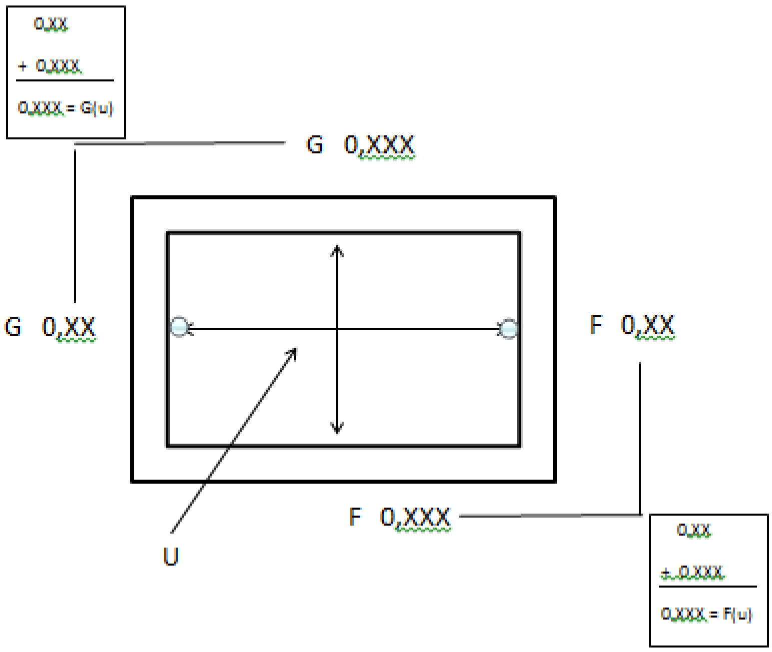
Exemple de loi normale avec différentes moyennes et même variance :

4.2.8 Calcul pratique

Pour la Loi normale centre réduite nous avons :

1) **U ⟶P ? Calcul de P (Probabilité) pour U (variable) donnée**





Exemple : calculer F(u) et G(u) pour

a) U=0,3961 ; F(u) =0,65+0,004 =0,654 G(u) = 0,34+0,006 = 0,346

(2)

Exercice : soit X une variable aléatoire de lo N (0,1) , exprimez à l'aide de la fonction de répartition de X , puis calculer à l'aide de la table de probabilité :

a) P[X > 1,49]=G(1,49)=1-F(1,49) ; F(1,49)=0,932 ; G(1,49)=0,068 donc P[X > 1,49]=0,068 =1-0,932

(3)

2) <u>P ⟶ U ? Calcul de U (variable) pour P (Probabilité) donnée :</u>

<u>Procédure</u>

- $P \ = 0,XXX = \begin{cases} 0,XX \\ \quad + \\ 0{,}00X \end{cases}$ *je les cherche soit dans F ou G*

$$Je\ determine\ P\ soit\ pour\ G\ ou\ F \begin{cases} G\ P[U > u] \\ F\ \ P[U < u] \end{cases}$$

- $puis\ je\ determine\ le\ u\ a\ partir\ de\ la\ table \begin{cases} \quad directement\ si\ F \geq 0{,}5\ ou\ G \leq 0{,}5 \\ sinon\ F(u) = G(-u)\ \ ou\ G(u) = -F(u) \end{cases}$

<u>Exemple :</u>

a) P[X<u]=0,9 , F(u)=0,90+0,00 donc u=1,2816

(4)

<u>Exercice :</u>

La taille des hommes d'une population est modélisée par une loi normale N (165 , 144) (unité le cm).

1) Quelle proportion des hommes a une taille inferieur a 180 cm
2) Quelle proportion des hommes mesure entre 150 et 190 cm
3) Si on classait milles choisis au hasard par ordre de taille croissante, quelle serait la taille du 800-^{eme} ?

Solution :

1) Nous cherchons P[X<180] :

X⟶N(165 ; 144) ; m=165 cm ; $\sigma = \sqrt{144} = 12\ cm.$

$$P[X < 180] = P\left[\frac{X-m}{\sigma} < \frac{180-m}{\sigma}\right]$$
$$P\left[U < \frac{180-165}{12}\right]$$
$$P[U < 1{,}25]$$
$$= F(1{,}25)$$
$$u = 1{,}25 \underset{table}{\Longrightarrow} F = 0{,}894$$

P[X<180]=0,894

2) Les hommes entre 150 et 190 cm , nous cherchons :

P[150< X <190]

$$= P\left[\frac{X_1-m}{\sigma} < X < \frac{X_2-m}{\sigma}\right]$$
$$= P\left[\frac{150-165}{12} < X < \frac{190-165}{12}\right]$$
$$P[-1{,}25 < X < 2{,}083]$$
$$= \begin{cases} F(2{,}083) - F(-1{,}25) = F(2{,}083) - G(1{,}25) \\ G(-1{,}25) - G(2{,}083) = F(1{,}25) - G(2{,}083) \end{cases} ou$$
$$u = 0.283 \underset{table}{\Longrightarrow} \begin{cases} F = 0.981 \\ G = 0.019 \end{cases}$$
$$u = 1.25 \underset{table}{\Longrightarrow} \begin{cases} F = 0.894 \\ G = 0.106 \end{cases}$$

P[150< X <190]=0.981-0.106=0.875

3) La taille du 800 ieme

$$\begin{cases} P[U < u] = \frac{800}{1000} = 0.8 = F(u) \\ P[U > u] = \frac{200}{1000} = 0.2 = G(u) \end{cases}$$ ou

On recherche le u équivalent :

$$F(u) = 0.8 \underset{table}{\Longrightarrow} u = 0{,}842$$

$$x = (\sigma.u) + m$$
$$= (12.0{,}842) + 165$$
$$= 10{,}104 + 165$$
$$= 175{,}1\ cm$$

Résumé de calcul:

Loi binomiale

P(X=k)=$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = \binom{n}{k}p^k q^{n-k}$;

$$\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Moment (Esperance mathématique et variance) :

E(X)=np Var(X) =np(1-p)=npq

Loi de Laplace gauss ou loi normale

1) **x→U ⟶P ? Calcul de P (Probabilité) pour U (variable) donnée**

Soit u valeur positive :

a) *calcul de u a partir de x :* x→u ; $u = \frac{x-m}{\sigma}$

b) calcul de P à partir de u : U ⟶P :

<u>Pour des valeurs positive :</u>

P(U <u)=F(u)

P(U>u)=G(u)

<u>Pour des valeurs négatives :</u>

P(U <-u)=F(-u)=G(u)

P(U>-u)=G(-u)=F(u)

Soit u_1 est u_2 avec $u_2 > u_1$

$P[u_1 < U < u_2] = F(u_2) - F(u_1) > 0$

2) **P ⟶(U ? Calcul de U (variable) pour P (Probabilité) donnée)→ x :**

a) Calcul de u a partir de P : P ⟶ U

$P(U \leq u) = F(u)$ ou

$P(U \geq u) = G(u)$

<u>Pour F(u) :</u>

$Si\ F(u) \geq 0.5 \ \rightarrow u\ depuis\ la\ table$

$Si\ F(u) < 0.5$

$alors\ F(u) = G(-u)$

$\rightarrow la\ table\ me\ donne\ (-u) la\ reponse\ est\ u$

<u>Pour G(u) :</u>

$Si\ G(u) \leq 0.5 \ \rightarrow u\ depuis\ la\ table$

$Si\ G(u) > 0.5$

$alors\ G(u) = F(-u)$

$\rightarrow la\ table\ me\ donne\ (-u)\ la\ reponse\ est\ u$

b) Calcul de x a partir de u : u → x :

$x = (\sigma.u) + m$