

20/02/2022. S2.

Chapitre I: Dérivée.

1- Dérivée en un point:

Définition: Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction, Soit $x_0 \in I$, f est dérivable en x_0 si le taux d'accroissement $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ a une limite finie lorsque x tend vers x_0 , la limite s'appelle alors le nombre dérivé de f en x_0 et est noté $f'(x_0)$, Ainsi:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Définition 2: f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point $x_0 \in I$, La fonction dérivée de f elle se note f' ou $\frac{df}{dx}$.

Exemple:

$f(x) = x^2$ dérivable en tout point x_0 .

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = x + x_0 \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 2x_0$$

$$f'(x_0) = 2x_0.$$

Proposition:

Soit I un intervalle ouvert, $x_0 \in I$ et soit

$f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0 .
- Si f est dérivable sur I alors f est continue sur I .

2. Calcul des dérivées :

soit $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonction dérivables sur I ,
Alors pour tout $x \in I$:

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x).$$

$$(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x), \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$(f \times g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x).$$

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}.$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \dots$$

3 - dérivée de fonction usuelle :

Fonction	Dérivée	set	D
x^n	$n x^{n-1} \quad (n \in \mathbb{Z})$	u^n	$n u' u^{n-1}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{u}$	$\frac{1}{2} \frac{u'}{\sqrt{u}}$
e^x	e^x	e^u	$u' e^u$
$\sin x$	$\cos x$	$\ln u$	$\frac{u'}{u}$
$\cos x$	$-\sin x$		
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$		

$$u'(1 + \tan^2 u) = \frac{u'}{\cos^2 u} \leftarrow$$

$$\cos u$$

$$\sin u$$

$$\tan u$$

$$-u' \sin u$$

$$u' \cos u$$

4. Composition:

Si f est dérivable en x et g est dérivable en $f(x)$ alors $g \circ f$ est dérivable en x de dérivée.

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x).$$

Exemple: Calculons la dérivée de $\ln(1+x^2)$

$$g(x) = \ln(x), \quad f(x) = 1 + x^2$$

$$g'(x) = \frac{1}{x}, \quad f'(x) = 2x.$$

$$\begin{aligned} (g \circ f)'(x) &= g'(f(x)) \times f'(x) = g'(1+x^2) \times f'(x) \\ &= \frac{1}{1+x^2} \times 2x. \end{aligned}$$

Définition:

Soit I un intervalle ouvert: Soit $I \rightarrow J$ dérivable et bijective dont on note f^{-1} .

$f^{-1}: J \rightarrow I$ la bijection réciproque.

Si f' ne s'annule pas sur I alors f^{-1} est dérivable et on a pour tout $(f^{-1}(x))(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

5. Dérivées successives:

Théorème: Formule de Leibniz.

$$(f \cdot g)^{(n)} = f^{(n)} \cdot g + \binom{n}{1} f^{(n-1)} g^{(1)} + \dots + \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)} + \dots + f \cdot g^{(n)}.$$

Autrement dit:
$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)} \cdot g^{(k)}.$$

6. Extremum local:

6.1. Extremum local:

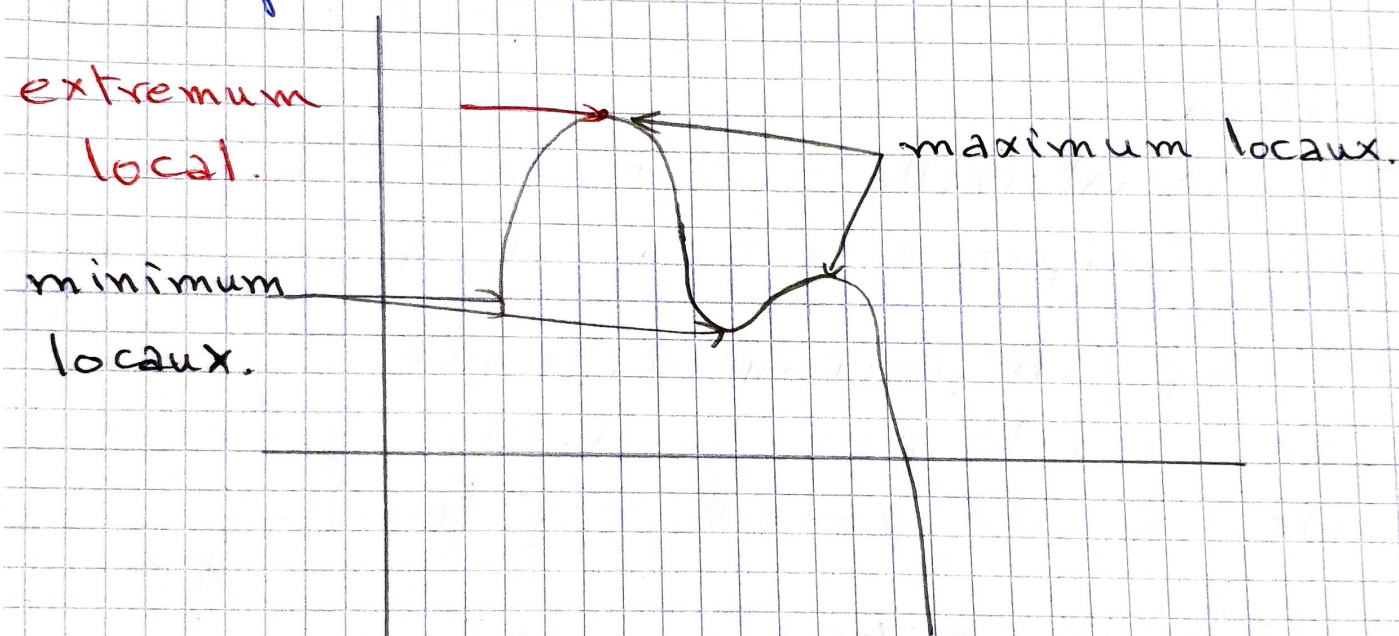
Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I .

- On dit que x_0 est un point critique de f si $f'(x_0) = 0$.

- On dit que f admet un maximum local en x_0 (resp un minimum local) s'il existe un intervalle ouvert J contenant x_0 tel que:

pour tout $x \in I \cap J$: $f(x) \leq f(x_0)$ (resp $f(x) \geq f(x_0)$)

- On dit que f admet un extremum local en x_0 si admet un maximum local ou un minimum local en ce point.



7. Théorème de Rolle:

Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tel que:

- f est continue sur $[a, b]$.

- f est dérivable sur $]a, b[$.

- $f(a) = f(b)$.

Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

8. Théorème des accroissements finis:

Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, Il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a) \quad / \quad \frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(c).$$

9. Fonction croissante et dérivée:

Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

- 1 - $\forall x \in]a, b[: f'(x) \geq 0 \Rightarrow f$ est croissante.
- 2 - $\forall x \in]a, b[: f'(x) \leq 0 \Rightarrow f$ est décroissante.
- 3 - $\forall x \in]a, b[: f'(x) = 0 \Rightarrow f$ est constante.
- 4 - $\forall x \in]a, b[: f'(x) > 0 \Rightarrow f$ est strictement croissante.
- 5 - $\forall x \in]a, b[: f'(x) < 0 \Rightarrow f$ est strictement décroissante.

10. Théorème de accroissement finie généralisé:

Si deux fonction f, g définies et continue sur $[a, b]$ admettent sur $]a, b[$ les dérivée f' et g' une avec $g'(c) \neq 0$ alors il existe au moins un point c , $c \in]a, b[$.

Pour lequel:
$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

11. Règle de l'Hopital:

1 - Première règle de l'Hopital:

Soit f et g deux f et g deux fonction numérique continues dans un voisinage I du point x_0 dans $\mathbb{R}$ et dérivable sur $I - \{x_0\}$, satisfaisant à

$f(x_0) = g(x_0) = 0$ et à $g(x) \neq 0$ et $g'(x) \neq 0$ pour $x \neq x_0$. alors si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$

11- 2. Deuxième règle de l'Hôpital :

Soient f et g deux fonctions continues et dérivables sur $]a, b[$, $x_0 \in]a, b[$ alors : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g(x) = \infty$ et

$\exists g(x) \neq 0$ et $g'(x) \neq 0$ pour $x \neq x_0$. Alors si :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

Exercice :

Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$$1 - y_1 = \frac{x-1}{x^2+1}$$

$$y_2 = \frac{3x-2}{x^2(x^3+x+2)}$$

$$y_3 = \sqrt{\frac{1+x^2}{1+x^4}}$$

$$y_4 = \sqrt{x + \sqrt{x^2+1}}$$

$$y_5 = \frac{x \sin x}{1 + \ln x}$$

$$y_6 = \frac{e^{\frac{1}{x}+1}}{e^{\frac{1}{x}}-1}, \quad y_7 = (\sin x)^{x^2}$$

01/03/2022.

Formule de Taylor:

1. Formule de Taylor avec le reste intégrale:

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$) et soit $a, x \in I$, alors:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!} (x-a)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + \underbrace{\int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n dt}_{R(n)}$$

2. Formule de Taylor avec reste $f^{(n+1)}(c)$:

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fct de $\mathcal{C}^{n+1}$ et soit $a, x \in I$:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}}_{R(n)}$$

Formule de Taylor - Young:

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fct de classe $\mathcal{C}^n$ et soit $a \in I$, Alors pour tout $x \in I$ on a:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + \underbrace{(x-a)^n \varepsilon(x)}_{R(n)}$$

Résumé: Il y a donc trois formules de Taylor qui s'écrivent toutes sous forme:

$$f(x) = \underbrace{T_n(x)}_{\text{Polynôme}} + R_n(x)$$

exp : $f(x) = \ln(1+x)$

$$f(0) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}, \quad f''(0) = -1$$

$$f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}, \quad f'''(0) = 2$$

$$f(x) = (-1)^{n-1} (n-1)! \frac{1}{(1+x)^n}$$

$$\frac{-6}{(1+x)^4} \quad / \quad \frac{24}{(1+x)^5}$$

Cas particulier: Formule de Taylor young au voisinage de 0.

Cas particulière:

On a: $a=0$ la formule s'écrit alors:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + x^n \varepsilon(x).$$

Chapitre 2: Développement limité au voisinage d'un point.

1/ Définition: Soit I un Intervalle ouvert $f: I \rightarrow \mathbb{R}$

pour $a \in I$ et $n \in \mathbb{N}$, on dit que f admet un développement limité (DL) au point a et à l'ordre n , s'il existe des réels

$C_0, C_1, C_2, \dots, C_n$ et une fct $\varepsilon: I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$ de sorte que pour tout $x \in I$:

$$f(x) = C_0 + C_1(x-a) + \dots + C_n(x-a)^n + (x-a)^n \varepsilon(x).$$

la partie polynomiale de DL: $C_0 + \dots + C_n(x-a)^n$.

le reste du DL: $(x-a)^n \varepsilon(x)$.

2- DL des fonctions usuelles:

Les DL suivants en 0 proviennent de la formule Taylor Young:

$$\exp x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + x^n \varepsilon(x).$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+2} \varepsilon(x).$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+3} \varepsilon(x).$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+2} \varepsilon(x).$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+3} \varepsilon(x).$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + x^n \mathcal{E}(n).$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + x^n \mathcal{E}(n).$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + x^n \mathcal{E}(n).$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{2^n n!} x^n.$$

$$+ x^n \mathcal{E}(n).$$

3. Opération sur les développements limités :

3-1 Somme et produit :

Soit f et g deux ~~produit~~ fonctions qui admettent des DL en 0 à l'ordre n :

$$f(x) = C_0 + C_1 x + \dots + C_n x^n + x^n \mathcal{E}_1(x).$$

$$g(x) = d_0 + d_1 x + \dots + d_n x^n + x^n \mathcal{E}_2(x).$$

d'où C et d sont des Cst.

Proposition :

① $f+g$ admet un DL en 0 à l'ordre n qui est :

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = (C_0 + d_0) + (C_1 + d_1)x + \dots + (C_n + d_n)x^n + x^n \mathcal{E}(x).$$

② $f \times g$ admet un DL en 0 à l'ordre n qui est :

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) = T_n(x) + x^n \mathcal{E}(x).$$

$$T_n(x) = (C_0 + C_1 x + \dots + C_n x^n + x^n \mathcal{E}(x)) \times (d_0 + d_1 x + \dots + d_n x^n + \mathcal{E}).$$

Exemple: Calculer le DL de $\cos x \times \sqrt{1+x}$ en 0 à l'ordre 2.

$$\cos x \times \sqrt{1+x} = \left(1 - \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon_1(x)\right) \left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + x^2 \varepsilon_2(x)\right)$$

$$= 1 \left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + x^2 \varepsilon_2(x)\right) - \frac{x^2}{2} \left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + x^2 \varepsilon_2(x)\right) + x^2 \varepsilon_1(x) \left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + x^2 \varepsilon_2(x)\right)$$

$$= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \underbrace{x^2 \varepsilon_2(x)}_R - \frac{x^2}{2} - \underbrace{\frac{x^3}{4}}_{R} + \underbrace{\frac{x^4}{16}}_{R} - \underbrace{\frac{x^4}{2} \varepsilon_2(x)}_R + \underbrace{x^2 \varepsilon_1(x) \left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + x^2 \varepsilon_2(x)\right)}_R$$

$$= 1 + \frac{x}{2} - \frac{5}{8} x^2 + \underbrace{x^2 \varepsilon(x)}_{\text{Reste.}}$$

$$= 1 + \frac{x}{2} - \frac{5}{8} x^2 + \underbrace{O(x^2)}_{\text{Reste.}}$$

3. 2. Composition:

On écrit:

$$f(x) = C_0 + C_1 x + \dots + C_n x^n + x^n \varepsilon_1(x).$$

$$g(x) = d_0 + C_1 x + \dots + d_n x^n + x^n \varepsilon_2(x).$$

Proposition:

à $g(0)=0$ (cà.d $d_0=0$) alors la fct $f \circ g$ admet un DL en 0 à l'ordre n dont la partie polynomiale est le polynôme tronqué à l'ordre n de la composition $C(D(x))$.

Exemple: Calculer le DL de $h(x) = \sin(\ln(1+x))$ en 0

à l'ordre 3.

$$\sin u = u - \frac{u^3}{3!} + u^3 \varepsilon(x).$$

$$\ln(1+x) = u = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3 \varepsilon(x).$$

$$u = \ln(1+x)$$

$$u \times u = u^2$$

$$u \times u^2 = u^3$$

$$U \times U = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3 \mathcal{E}_1(x) \right)$$

$$\times \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3 \mathcal{E}_1(x) \right)$$

$$= x^2 - x^3 + x^3 \mathcal{E}_2(x).$$

$$U^2 \times U = U^3 = (x^2 - x^3 + x^3 \mathcal{E}_2(x)) \times \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3 \mathcal{E}_1(x) \right)$$

$$= x^3 + x^3 \mathcal{E}(x).$$

$$f \circ g(x), \quad g(0) = 0.$$

$$\sin U = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3 \mathcal{E}(x) - \frac{1}{3!} (x^3 + x^3 \mathcal{E}(x))$$

$$+ U^3 \mathcal{E}(x).$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{6} x^3 + x^3 \mathcal{E}(x).$$

Exemple: DL de $\sqrt{\cos x}$ en 0 à l'ordre 4.

$$\sqrt{1+U} = 1 + \frac{1}{2} U - \frac{1}{8} U^2 + o(U^2).$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + x^4 \mathcal{E}(x).$$

$$1+U = \cos x.$$

$$U = \cos x - 1.$$

$$U = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + x^4 \mathcal{E}(x).$$

$$\sqrt{1+U} = 1 + \frac{U}{2} - \frac{U^2}{8} + U^2 \mathcal{E}(x).$$

$$U \times U = \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^4 \mathcal{E}(x) \right) \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^4 \mathcal{E}(x) \right)$$

$$U^2 = \frac{x^4}{4} + x^4 \mathcal{E}(x).$$

$$\sqrt{1+U} = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{48} - \frac{x^4}{32} + x^4 \mathcal{E}(x).$$

$$= 1 - \frac{x^2}{4} - \frac{1}{96} x^4 + x^4 \mathcal{E}(x).$$

3- Division: soit f, g deux fct, On cherche DL de la quotient f/g , Soient:

$$f(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \dots + x^n \mathcal{E}_1(x).$$

$$g(x) = d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + \dots + x^n \mathcal{E}_2(x).$$

Nous allons utiliser le DL: $\left(\frac{1}{1+u}\right)$

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + \dots + u^n \mathcal{E}(u).$$

1- Si $d_0 = 1$ On pose $u = d_1 x + \dots + d_n x^n + x^n \mathcal{E}(x)$ et le quotient s'écrit: $f/g = f \times \frac{1}{1+u}$.

2- Si d_0 est quelqun avec $d_0 \neq 0$ On se ramène au cas précédent en écrivant:

$$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{d_0} \cdot \frac{1}{1 + \frac{d_1}{d_0} x + \frac{d_2}{d_0} x^2 + \dots + \frac{d_n}{d_0} x^n + \frac{x^n \mathcal{E}_2(x)}{d_0}}$$

3- Si $d_0 = 0$ alors on factorise par x^k afin de se ramène aux cas précédent.

Exemple: DL $\tan x$ en 0 à l'ordre 5.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^5 \mathcal{E}(x).$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^5 \mathcal{E}(x) = 1 + u.$$

$$\tan x = \sin x \times \frac{1}{1+u}$$

$$u = \cos x - 1 = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^5 \mathcal{E}(x).$$

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + u^4 - u^5 + u^5 \mathcal{E}(u).$$

$$u^2 = \frac{x^4}{4} + x^5 \mathcal{E}(x), \quad u^3 = x^5 \mathcal{E}(x).$$

$$\frac{1}{1+u} = 1 + \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^2}{2} + x^5 \mathcal{E}(x)$$

$$\frac{1}{1+u} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{24} x^4 + x^5 \mathcal{E}(x).$$

$$\begin{aligned}
\tan x &= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^5 \mathcal{E}(x) \right) \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^5 \mathcal{E}(x) \right) \\
&= x + \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{24} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{12} + \frac{x^5}{120} + x^5 \mathcal{E}(x) \\
&= x + \frac{3x^3 - x^3}{6} + \frac{25x^5 - 10x^5 + x^5}{120} + x^5 \mathcal{E}(x) \\
&= x + \frac{2}{6} x^3 + \frac{16}{120} x^5 + x^5 \mathcal{E}(x) \\
&= x + \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{15} x^5 + x^5 \mathcal{E}(x)
\end{aligned}$$

2. DL de $\frac{1+x}{2+x}$ en 0 à l'ordre 4.

$$\frac{1+x}{2+x} = (1+x) \times \frac{1}{2+x} \quad , \quad \frac{1}{2+x} = \frac{1}{g(x)} \quad , \quad d_0 = 2, d_1 = 1, d_2 = 0.$$

$$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x}{2}}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1+x}{2+x} &= \frac{1}{2} (1+x) \left(1 - \frac{x}{2} + \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^3 + \left(\frac{x}{2}\right)^4 + o(x^4) \right) \\
&= \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{2} \right) \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{8} + \frac{x^4}{16} + o(x^4) \right) \\
&= \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} + \frac{x^4}{32} + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{8} \\
&\quad - \frac{x^4}{32} + \frac{x^5}{32} + o(x^4) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{x}{4} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{x^4}{32} + o(x^4)
\end{aligned}$$

3. DL de $\frac{\sin x}{\sinh x}$ en 0 à l'ordre 4.

4 - Intégration:

Soit: $I \rightarrow \mathbb{R}$ une fct de Classe C^n dont le DL en $a \in I$ à l'ordre n est:

$$f(x) = C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + \dots + C_n(x-a)^n + (x-a)^n \mathcal{E}(x).$$

F une primitive de f , Alors F admet un DL en a à l'ordre $n+1$ qui s'écrit:

$$F(x) = F(a) + C_0(x-a) + C_1 \frac{(x-a)^2}{2} + \dots + C_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} + (x-a)^{n+1} \varepsilon(x)$$

Où $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$.

5. Application des développements limités:

5.1. Calculs de limites:

les DL sont très efficaces pour calculer des limites ayant des formes indéterminées.

- Il suffit juste de remarquer que si:

$$f(x) = C_0 + C_1(x-a) + \dots \text{ alors } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = C_0.$$

Exemple:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \tan x + \frac{1}{2} \sin^2 x}{3x^2 \sin^2 x} \quad \text{l'ordre 4.}$$

$$\begin{aligned} \ln(1+x) - \tan x + \frac{1}{2} \sin^2 x &= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + x^4 \varepsilon(x) \right) \\ &- \left(x + \frac{x^3}{3} + x^4 \varepsilon(x) \right) + \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^3}{6} + x^4 \varepsilon(x) \right)^2 \\ &= \frac{-5}{12} x^4 + x^4 \varepsilon(x). \end{aligned}$$

$$g(x) = 3x^2 \sin^2 x = 3x^2 (x + o(x))^2 = 3x^4 + o(x^4).$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-5}{12} x^4 + o(x^4)}{3x^4 + o(x^4)} = \frac{-5}{36}.$$

Développement limité en $+\infty$:

Soit f une fonction définie sur un Intervalle $I =]n_0, +\infty[$. On dit que f admet un développement limité à l'ordre n s'il existe des réels $C_0, C_1, C_2, \dots, C_n$ tel que:

$$f(x) = C_0 + \frac{C_1}{x} + \dots + \frac{C_n}{x^n} + \frac{1}{x^n} \varepsilon\left(\frac{1}{x^n}\right).$$

Où $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{E}\left(\frac{1}{n}\right) = 0$.

Exemple: DL en $+\infty$.

$$\ln\left(2 + \frac{1}{n}\right) = \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right).$$

$$= \ln 2 + \frac{1}{2n} + \frac{1}{8n^2} + \frac{1}{24n^3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n 2^n n^n}$$

$$+ \frac{1}{n^n} o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Chapitre III: Primitive et intégrale.

1 - Définition:

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I q.lq.

On dit que: $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ est une primitive de f sur I si F est une fonction dérivable sur I vérifiant:

$$F'(x) = f(x) \text{ pour tout } x \in I.$$

Exemple: $f(x) = x^2$, $F(x) = \frac{x^3}{3}$.

$g(x) = \sqrt{x}$, $F(x) = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}$.

2 - Primitive des fonctions usuelles:

$f(x)$	$F(x)$
$\int e^x dx$	$e^x + C$
$\int \cos x dx$	$\sin x + C$
$\int \sin x dx$	$-\cos x + C$
$\int x^n dx$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\int \frac{1}{x} dx$	$\ln x + C$
$\int \operatorname{Sh} x$	$\operatorname{Ch} x + C$
$\int \operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x + C$
$\int \frac{dx}{1+x^2}$	$\arctan x + C$

$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$	$\begin{cases} \arcsin x + C \\ \text{sur }]-1, 1[\\ \frac{\pi}{2} - \arccos x + C \end{cases}$
$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$	$\begin{cases} \operatorname{Argsh} x \\ \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + C \end{cases}$