II. ETUDE DE FIABILITÉ

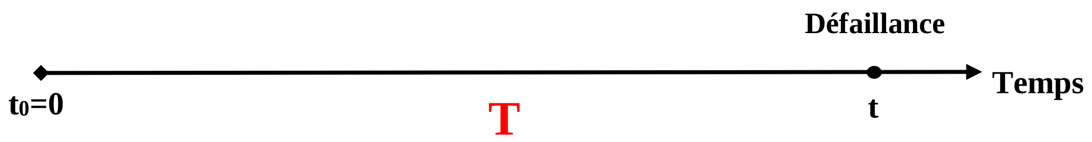
❖ ***Hypothèses:***

a. On s' intéresse à un bien choisi au hasard dans une population constituée des biens du même type;

b. Soit $\boldsymbol{t_0 = 0}$: L'instant où le bien choisi est mis en marche, soit pour la 1ère fois (mise en service), soit après une réparation (remise en état de fonctionnement).

c. Soit ***T*** une **variable aléatoire** qui à tout bien choisi au hasard dans la population, associe son ***TBF*** (**T**emps de **B**on **F**onctionnement ; *en anglais* **T**ime **B**etween **F**ailure) ou sa durée de vie avant une défaillance. Tel que :

- T : Mesure l'instant où apparaît une défaillance à partir de l'instant $\boldsymbol{t_0 = 0}$
- T : variable aléatoire continue qui prend les valeurs $\boldsymbol{[0,+\infty]}$;
- T : Possède une densité de probabilité.



❖ ***Fonction de répartition de la variable T***

a. En terme de défaillance

En terme de défaillance, la fonction de répartition de la variable T, est la probabilité qu'un bien prélevé au hasard dans la population considérée ***ait*** *une défaillance avant l'instant t.*

On définit mathématiquement la fonction de défaillance par le nombre $F(t)$ « *en anglais* **Failure** », pour $t \geq 0$

$$F(t) = P(T \leq t) = \int_0^t f(t)dt$$

$$F^{/}(t) = f(t) \quad 0 \leq F(t) \leq 1$$

- $F(t)$: Fonction de défaillance du système
- $f(t)$: la densité de défaillance ou bien la densité de probabilité de la variable T

b. En terme de fiabilité

En terme de fiabilité, la fonction de répartition de la variable T, est la probabilité qu'un bien prélevé au hasard dans la population considérée ***n'ait pas*** *de défaillance avant l'instant t.*

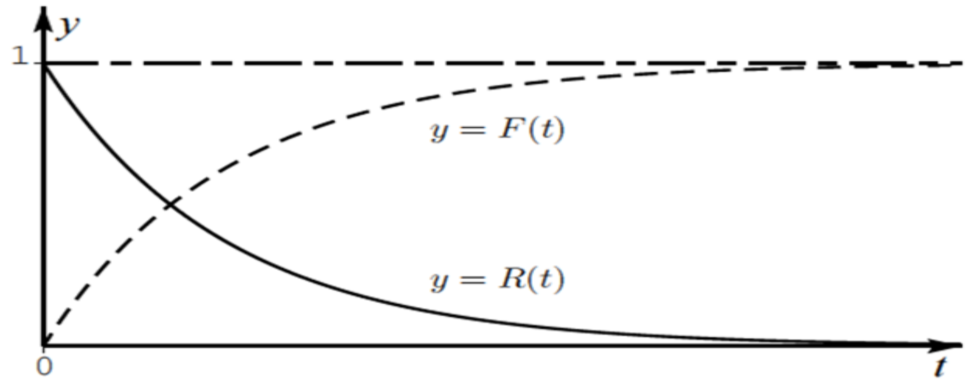
On définit mathématiquement la fonction de fiabilité par le nombre $R(t)$ « *en anglais* **Reliability** » associée à celle de la défaillance, tel que pour tout $t \geq 0$:

$$R(t) = P(T \geq t)$$

- Sachant que $T \geq t$ est l'événement contraire de $T \leq t$, on peut écrire: $P(T \geq t) = 1 - P(T \leq t)$

- Puisque $P(T \leq t) = F(t)$ et $P(T \geq t) = R(t)$, alors on a:

$$R(t) = 1 - F(t)$$



❖ **Taux de défaillance instantané $\lambda(t)$**

L'écriture mathématique du taux de défaillance à l'instant t noté $\boldsymbol{\lambda(t)}$ est la suivante :

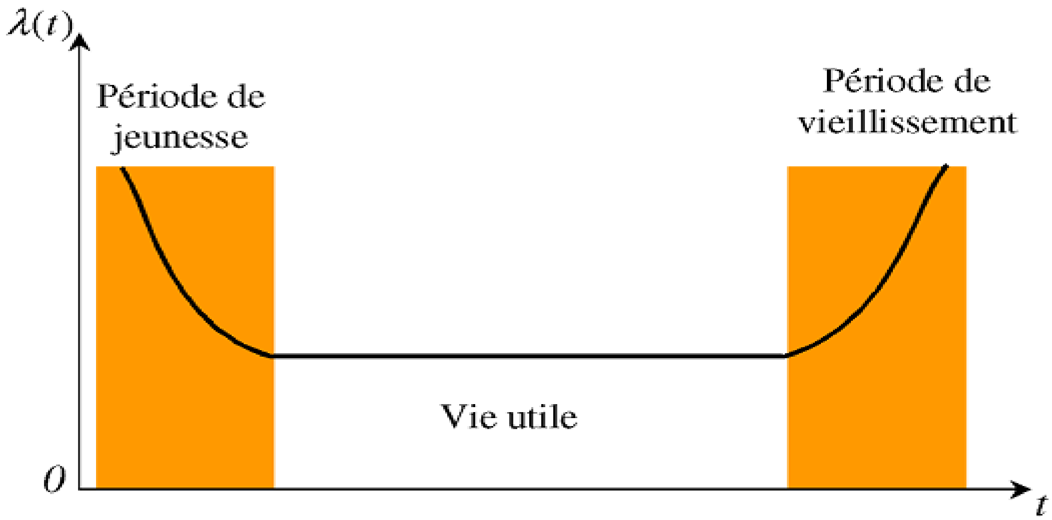
$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{1}{\Delta t} \cdot \frac{R(t) - R(t + \Delta t)}{R(t)} \right)$$

physiquement le terme $\boldsymbol{\lambda(t)}$, mesure la probabilité qu'une défaillance d'un dispositif se produise dans l'intervalle de temps [*t*, *t*+*Δt*] sachant que ce dispositif a bien fonctionné jusqu'à l'instant *t*.

Le taux de défaillance d'un dispositif à l'instant *t* est donc défini par :

$$\lambda(t) = -\frac{dR(t)}{dt} \cdot \frac{1}{R(t)} = \frac{dF(t)}{dt} \cdot \frac{1}{R(t)} = \frac{f(t)}{R(t)}$$

Le comportement temporel du taux de défaillance est représenté par la courbe en baignoire,



Cette courbe comporte trois phases :

- **Zone 1** : Période de jeunesse (rodage) ou bien ***période de défaillance précoce***
  - Cette zone représente la période de début de fonctionnement,

- Le taux de défaillance décroît avec le temps, car les défaillances précoces sont dues à des *défauts de fabrication ou de conception*.

➢ **Zone 2 :** Période de maturité (pleine activité) ou bien ***période de défaillance à taux constant***.
- Cette zone représente la période de maturité, ou vie utile
- Le taux de défaillance reste à peu près constant ; pendant cette période, les défaillances qui apparaissent sont dues au *hasard*.

➢ **Zone 3** : Période de vieillesse ou d'usure ou bien ***période de défaillance***.
- Cette zone représente la période d'usure.
- Le taux de défaillance croit avec le temps, car les défaillances sont dues à *l'âge ou à l'usure croissante du bien* du fait de la dégradation du matériel.

❖ **Temps moyen de bon fonctionnement MTBF**

Pour les biens réparables on retient comme indicateur de fiabilité, la moyenne des temps de bon fonctionnement satisfaisant entre deux défaillances du bien.

On le désigne par "**MTBF**" (**M**ean **T**ime **B**etween **F**ailure = **M**oyenne des **T**emps de **B**on **F**onctionnement).

On distingue deux aspects pour le calcul de la MTBF :

a. **aspect probabiliste :** La MTBF comme espérance mathématique de la variable aléatoire T.

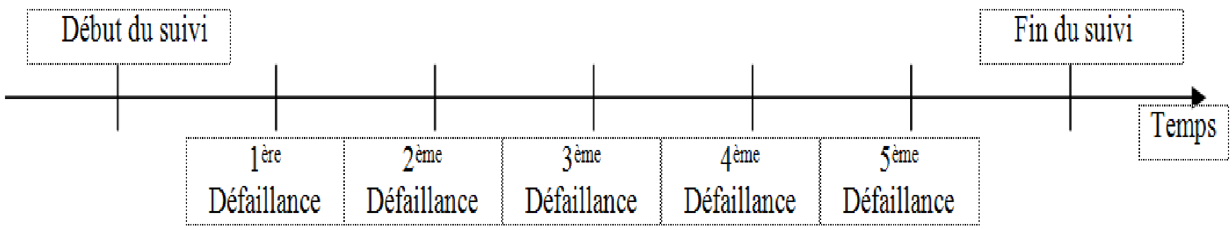
$$MTBF = E(t) = \int_0^{+\infty} t\ f(t)\, dt = \frac{1}{\lambda}$$

b. **aspect statistique :** La MTBF comme moyenne des temps de bon fonctionnement .

$$MTBF = \frac{\sum des\ temps\ de\ bon\ fonctionnement\ entre\ les\ n\ défaillances}{Nombre\ de\ périodes\ de\ bon\ fonctionnement}$$

Exemple: Calcul de la MTBF, pour une pompe de traitement des eaux usées à partir de son fichier de suivi de défaillances.

Temps de suivi [h]	Temps total de maintenance [h]	Nombre de défaillances	TBF [h]
28 080	*6.5*	*5*	*28 080-6.5 = 28 073.5*



Le nombre de période de bon fonctionnement est égal au nombre de défaillances plus 1. Donc:

$$MTBF = \frac{\sum des\ temps\ de\ bon\ fonctionnement}{Nombre\ de\ périodes\ de\ bon\ fonctionnement} = \frac{28\,073.5}{6} = 4\,678[h]$$

- **Fiabilité d'un système**

- ***Système avec composants montés en série***

Pour un système constitué de n composants montés en série, on montre que l'on a:

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{R}_1(\boldsymbol{t}) \times \boldsymbol{R}_2(\boldsymbol{t}) \times \boldsymbol{R}_3(\boldsymbol{t}) \times .... \times \boldsymbol{R}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{t})$$

- Le bon fonctionnement de chacun étant indépendant du bon fonctionnement des autres, où $\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2, \boldsymbol{R}_3, ...\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{n}}$ sont les fonctions de fiabilités respectives des $\boldsymbol{n}$ composants.
- Le système est *défaillant* dès qu'un seul composant est défaillant.

Exemple : Soit un poste de radio constitué de quatre composants connectés en série, une alimentation ***R_1=0.95***, une partie récepteur ***R_2=0.92*** ; un amplificateur ***R_3=0.97*** et haut-parleur ***R_4= 0.89*** ; déterminer la fiabilité **R_s** de l'appareil.

R_s= R_1*R_2 *R_3*R_4 = 0.95* 0.92*0.97*0.89 = 0.7545 *(soit une fiabilité de 75% environ)*

F_s = 1 - R_s = 1 - 0.7545 = 0.2455

- ***Système avec composants montés en parallèle***

Pour un système constitués de $\boldsymbol{n}$ composants montés en parallèles on montre que l'on a:

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{t}) \times \boldsymbol{F}_2(\boldsymbol{t}) \times \boldsymbol{F}_3(\boldsymbol{t}) \times .... \times \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{t})$$

- le bon fonctionnement de chacun étant indépendant du bon fonctionnement des autres, où $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{F}_3, ...\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{n}}$ sont les fonctions de défaillance respectives des $\boldsymbol{n}$ composants.
- Le système est *fonctionnel* dès qu'un seul composant est fonctionnel.

Exemple : Trois dispositifs A, B et C de même fiabilité ***R_1= R_2= R_3=0.75*** sont connectés en parallèle

F_s = (1-R_1)*(1- R_2)*(1- R_3) = 0.0156

R_s = 1 - F_s = 1 - 0.0156 = 0.9844