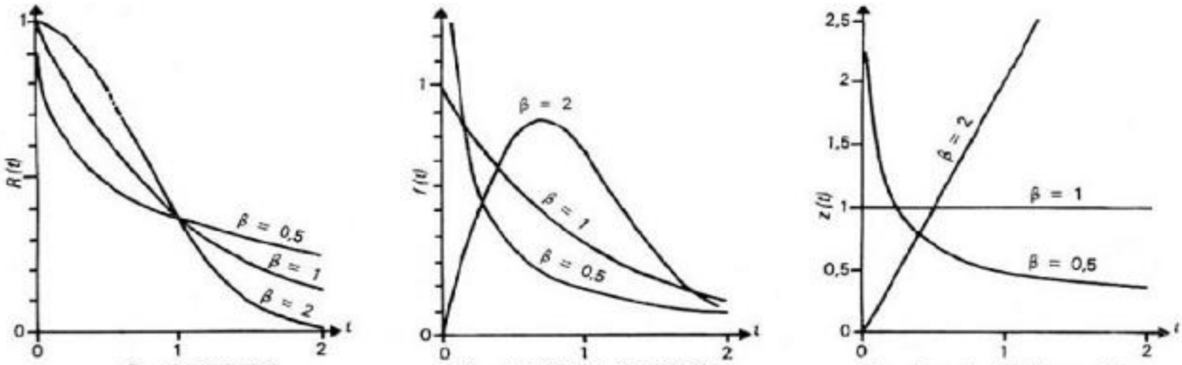
III. ESTIMATION DE F(t) ET DE R(t) :

3. Loi de Weibull

Wallodi Weibull (1887 – 1979) d'origine suédoise, inventeur et ingénieur pour nombreuses sociétés suédoises et allemandes, Il s'intéressa aux problèmes de résistance des matériaux, C'est dans ce cadre qu'apparaît en 1939 pour la première fois la distribution de Weibull, mais l'article qui eut le plus d'influence fut publié en 1951 dans le "Journal of Applied Mechanics" sous le titre "A Statistical Distribution Function of Wide Applicability" où sont décrient sept cas d'utilisation de la distribution de Weibull. En effet, l'intérêt de cette distribution est de permettre un bon ajustement d'une grande variété de problèmes de durée de vie. Weibull a constaté expérimentalement, que pour la plupart des matériels, la courbe représentative du taux d'avarie λ (taux de défailance) en fonction du temps, a la forme d'une "***courbe en baignoire***".

La loi de Weibull est la loi la plus populaire utilisée dans plusieurs domaines (électronique, mécanique,..). Elle permet de modéliser en particulier le comportement du système dans les trois phases de vie : ***période de jeunesse***, ***période de vie utile*** et ***période d'usure ou vieillissement***. Dans sa forme la plus générale, la distribution de Weibull dépend des trois paramètres***:*** ***β***, η et γ.

- ***β*** est le paramètre de forme ($\beta > 0$)
  - Si **β < 1** : le taux de défaillance ***λ(t)*** décroit, nous sommes dans la zone de jeunesse.
  - Si **β = 1** : le taux de défaillance est constant, nous sommes en zone de maturité. On retrouve la loi exponentielle.
  - Si **β > 1** : le taux de défaillance croît, nous sommes en phase de vieillesse.
  - Si **1,5 < β < 2,5** dégradation due à la fatigue.
  - Si **3 < β < 4** dégradation essentiellement due à l'usure ou la corrosion.



ⓐ fiabilité $R(t)$ ⓑ densité de probabilité $f(t)$ ⓒ taux de défaillance $z(t)$

- ❖ η est le ***paramètre d'échelle*** (η > 0) et indique l'ordre de grandeur de la durée de vie moyenne (**MTBF**).
- ❖ γ est le ***paramètre de position*** (γ ≥ 0) où c'est le paramètre de repérage qui fixe l'instant à partir duquel on étudie la fiabilité.
  - Si $\gamma = 0$: on étudie la fiabilité dès la première utilisation de la machine (la probabilité de défaillance dès la mise en service n'est pas nulle).
  - Si $\gamma > 0$: on étudie la fiabilité un certain temps après la première utilisation de l'appareil (la probabilité de défaillance dès la mise en service est nulle).
- La ***densité de probabilité*** d'une loi de Weibull a pour expression :

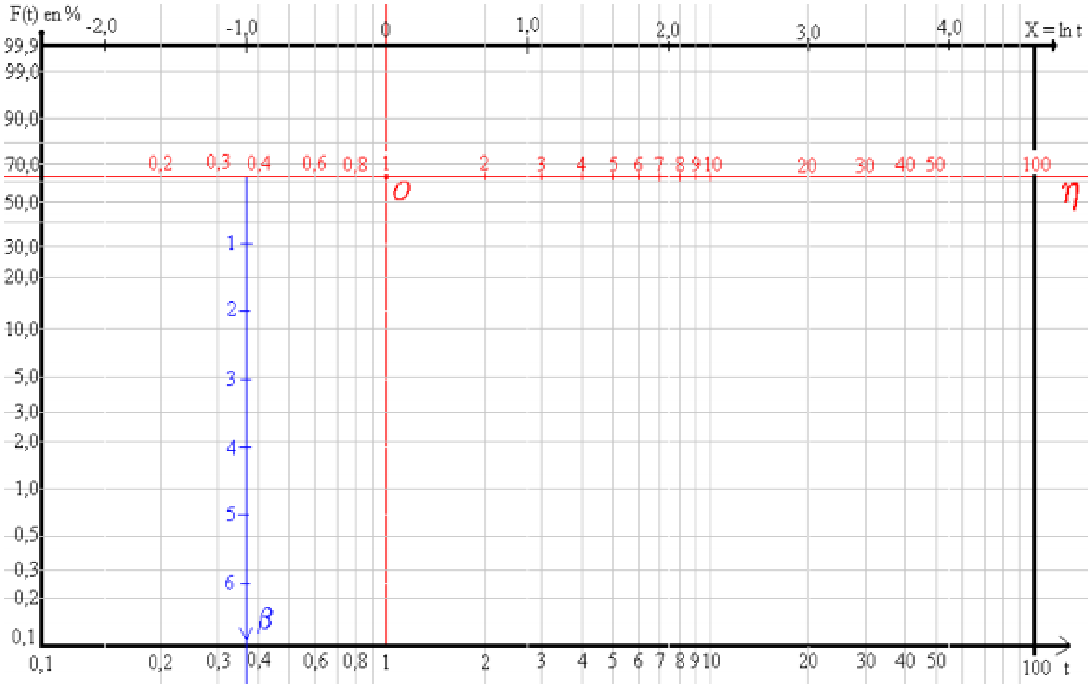
$$f(t) = \lambda(t).R(t) = \frac{\beta}{\eta}\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)} \qquad (t \geq \gamma)$$

- La ***fonction fiabilité*** s'écrit: $R(t) = e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta}}$
- La ***fonction de défaillance*** s'écrit: $F(t) = 1 - R(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta}}$
- Le ***taux de défaillance*** est donné par : $\lambda(t) = \frac{\beta}{\eta}\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta-1}$
- Si $\gamma = 0$ et $\beta = 1$ on obtient $\lambda = \frac{1}{\eta} = \frac{1}{MTBF}$

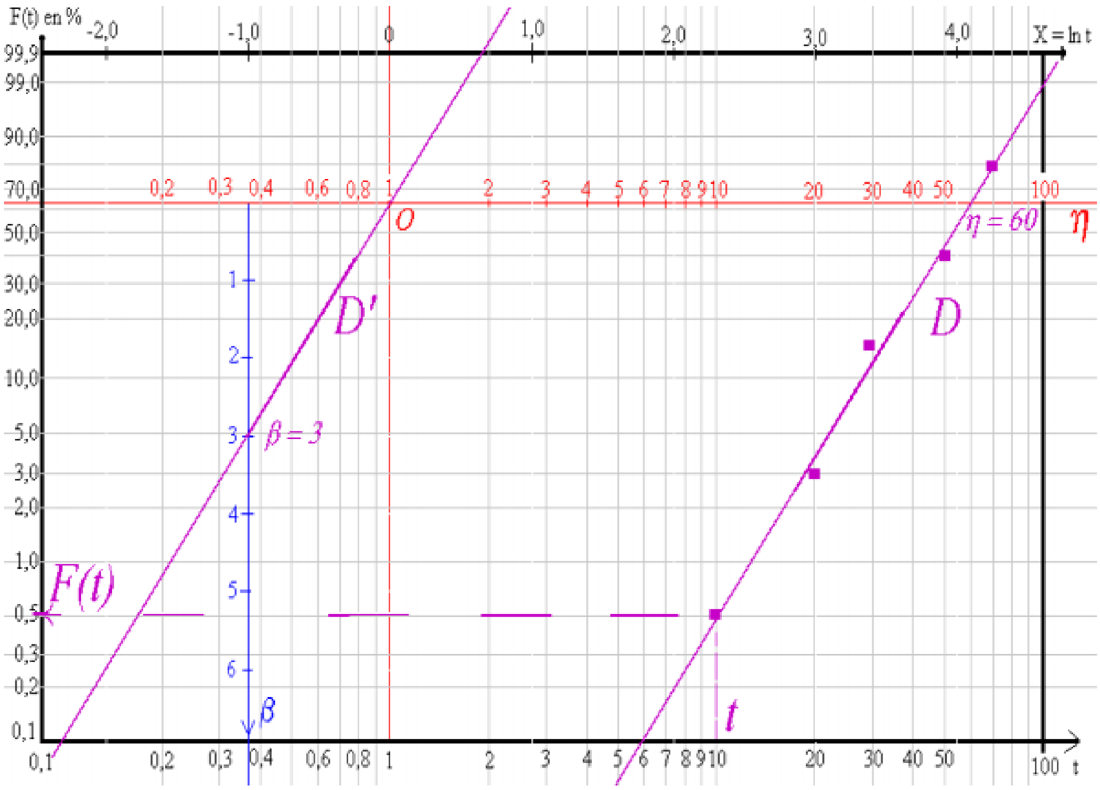
❖ Papier de Weibull

Le papier de Weibull sert à lire graphiquement les paramètres d'une loi de Weibull dans le cas où le paramètre γ est nul. En effet, la fonction de répartition associée à une loi de Weibull de paramètres β, $\gamma = 0$, η est définie par : $F(t) = 1 - R(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}}$

L'utilisation du papier imaginé par Weibull pour représenter ***F(t)*** permet de déceler une loi de Weibull. Les points de coordonnées $(t_i\ ;\ F(t_i))$ sont alignés lorsque $\gamma = 0$. On retrouve alors graphiquement les valeurs de β et de η.



On construit tout d'abord le nuage de points (t_i ; $F(t_i)$) puis une droite d'ajustement **D**, on lit la valeur du paramètre $\boldsymbol{\eta}$ sur l'axe des abscisses puis on trace la parallèle **D'** à la droite **D** passant par l'origine **O** du repère, on lit le paramètre $\boldsymbol{\beta}$ sur l'axe $\boldsymbol{\beta}$.



$$\boldsymbol{\beta = 3} \quad ; \qquad \boldsymbol{\eta = 60}$$

$$\boldsymbol{F(t)} = 1 - \boldsymbol{e}^{-\left(\frac{t}{60}\right)^{3}}$$

$$\boldsymbol{R(t)} = \boldsymbol{e}^{-\left(\frac{t}{60}\right)^{3}}$$