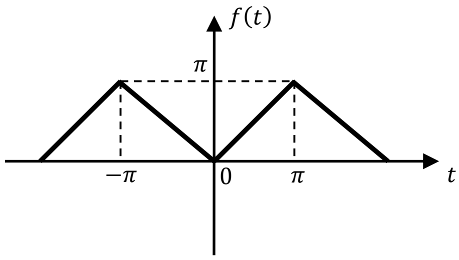
TD N°2 Séries de Fourier

Exercice 1 :

1. Développer en série de Fourier réelle le signal $2\pi -$ périodique définie sur $[-\pi \quad \pi]$ par :

$$f(t) = |t|$$



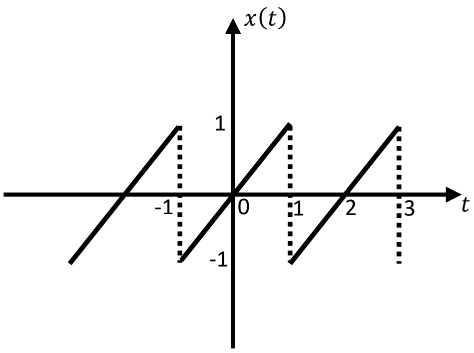
2. Déduire la valeur moyenne du signal et la fondamentale
3. Tracer le spectre d'amplitude de ce signal
4. Déterminer la puissance moyenne de ce signal

Exercice 2 :

1. Quels sont les coefficients complexes de Fourier pour le signal suivant :

$$y(t) = 1 + 4\sin 2\pi t - 2\cos 4\pi t$$

2. Développer en série de Fourier complexe la fonction $x(t)$ représenté sur la figure.



- Déduire la valeur moyenne de ce signal.
- Déduire la fondamentale (1^{iere} harmonique) et la 2^{ieme} harmonique.

Solutions

Exercice 1 :

1) Les coefficients de Fourier :

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt = \frac{2}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)dt = \frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\omega t\, dt = \frac{4}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\omega t\, dt = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} t\cos nt\, dt, \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} = 1$$

Intégration par partie en trouve :

$$a_n = \frac{2}{\pi n^2}(\cos(n\pi) - 1), \quad n \in \mathbb{N}^*$$

$$a_n = \begin{cases} 0 & n = 2k, k \in \mathbb{N}^* \\ -\dfrac{4}{(2k+1)^2\pi} & n = 2k+1, k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$b_n = 0,$ car la fonction est paire

Finalement :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t$$

$$f(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos\big((2k+1)t\big)}{(2k+1)^2}$$

2) La valeur moyenne :

$$a_0 = \frac{\pi}{2}$$

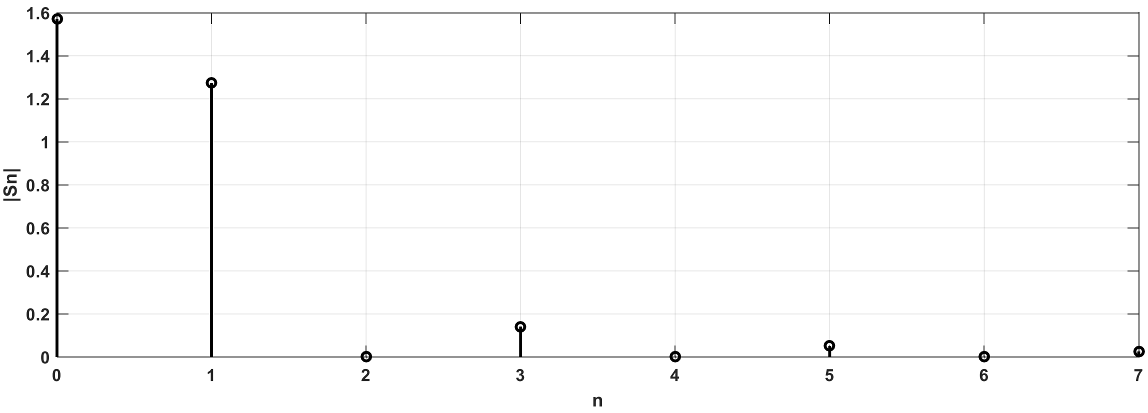
La fondamentale (1ère harmonique) pour $n = 1, k = 0$:

$$h_1(t) = -\frac{4}{\pi}\cos t = \frac{4}{\pi}\cos(t \pm \pi)$$

3) Spectre d'amplitude :

$$S_n = \sqrt{{a_n}^2 + {b_n}^2} = |a_n|$$

$$S_0 = |a_0| = \frac{\pi}{2}, S_1 = \frac{4}{\pi}, S_2 = 0, S_3 = \frac{4}{9\pi}, S_4 = 0, S_5 = \frac{4}{25\pi}$$



Spectre d'amplitude pour 7 harmoniques

4) Puissance moyenne du signal :

$$P = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)|^2 dt = \frac{2}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} t^2 dt = \frac{\pi^2}{3}$$

Exercice 2 :

1) Les coefficients complexes :

Le signal $y(t)$ est périodique de période $T = 1$ et de pulsation $\omega = 2\pi$. On peut écrire :

$$y(t) = 1 + 4 \cdot \frac{1}{2j}\left(e^{j2\pi t} - e^{-j2\pi t}\right) - 2 \cdot \frac{1}{2}\left(e^{j4\pi t} + e^{-j4\pi t}\right)$$

$$y(t) = 1 - 2je^{j2\pi t} + 2je^{-j2\pi t} - e^{j4\pi t} - e^{-j4\pi t}$$

$$y(t) = C_{-2}e^{-j4\pi t} + C_{-1}e^{-j2\pi t} + C_0 + C_1 e^{j2\pi t} + C_2 e^{j4\pi t}$$

Alors : $C_{-2} = -1, C_{-1} = 2j, C_0 = 1, C_1 = -2j$ et $C_2 = -1$

2) Le signal $x(t)$ est périodique de période $T = 2$ et $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$

Les coefficients de Fourier complexes :

$$C_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)e^{-jn\omega t} dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} te^{-jn\pi t} dt$$

Intégration par partie nous donne :

$$C_n = \frac{j}{n\pi}\cos n\pi - \frac{1}{2(n\pi)^2}\left(e^{jn\pi} - e^{-jn\pi}\right) = j\frac{(-1)^n}{n\pi} - \frac{j}{(n\pi)^2}\underbrace{\sin n\pi}_{=0}$$

$$C_n = j\frac{(-1)^n}{n\pi}, n \neq 0$$

Calculons C_0 :

$$C_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} tdt = 0$$

Donc :

$$C_n = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ j\dfrac{(-1)^n}{n\pi} & n \neq 0 \end{cases}$$

Finalement :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{-1} j\frac{(-1)^n}{n\pi}e^{jn\pi t} + \sum_{n=1}^{\infty} j\frac{(-1)^n}{n\pi}e^{jn\pi t}$$

- La valeur moyenne : $C_0 = 0$
- \- La 1ère harmonique (la fondamentale) :

$$h_1(t) = C_{-1}e^{-j\pi t} + C_1 e^{j\pi t} = \frac{j}{\pi}e^{-j\pi t} - \frac{j}{\pi}e^{j\pi t} = \frac{2}{\pi}\sin \pi t$$

\- La 2ème harmonique :

$$h_2(t) = C_{-2}e^{-2j\pi t} + C_2 e^{2j\pi t} = -\frac{j}{2\pi}e^{-2j\pi t} + \frac{j}{2\pi}e^{2j\pi t} = -\frac{1}{\pi}\sin 2\pi t$$

$$h_2(t) = \frac{1}{\pi}\sin(2\pi t \pm \pi)$$