FACULTE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES

Département de mathématiques
Année universitaire: 2021-2022
TD 01 : Les espaces L^p

Niveau: $3^{ème}$ année

Exercice 01 :

Soit $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ et soient les fonctions suivantes :

$$f(x) = e^{-a|x|}, \qquad f(x) = xe^{-a|x|}1_{[0,+\infty[}(x)$$

Etudier l'appartenance à $L^1(\mathbb{R})$ et à $L^2(\mathbb{R})$ de f et$g$.

Exercice 02 :

a) Montrer l'inclusion $L^2(I) \subset L^1(I)$ oú $I = [a, b]$. Cette inclusion est-elle vraie si $I = \mathbb{R}$?
Indication ; $f(x) = \dfrac{1}{1 + |x|}$.
b) Déterminer toutes les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ pour la fonction

$$f(x) = x^\alpha 1_{[0,1]}(x)$$

appartient à $L^1(\mathbb{R})$.

Exercice 03 :

Soit $(E, \mathfrak{T}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(E) < +\infty$. Soit également $1 \leq p < q < +\infty$. Montrer que

$$L^\infty(E) \subset L^q(E) \subset L^p(E) \subset L^1(E).$$

2) Montrer sur un exemple que l'hypothése $\mu(E) < +\infty$ est indispensable.
3) La premiére question permet de définir l'injection :

$$i : L^q \to L^p$$

$$f \to f$$

Montrer que cette injection est continue pour les normes $\|\cdot\|_q$ et $\|\cdot\|_p$.

Exercice 04 :

Soit $(E, \mathfrak{T}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(E) < +\infty$. Soit également $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions qui converge uniformément vers une fonction f sur E. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\| = 0.$$

Ce résultat reste-t-il vrai si l'on enléve l'hypothése $\mu(E) < +\infty$.

Exercice 05 :

Calculer les limites quand $n \to \infty$ des quantités suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1+nx}{(1+x)^n}dx$
2. $\displaystyle\int_0^1 f(x)e^{-n\sin^2 x}dx$ oú f est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
3. $\displaystyle\int_0^1 (1-\frac{x}{n})^n e^{\frac{x}{2}}dx$.