

Chapitre 3

Intégrales et calcul des primitives

Introduction

Nous avons vu dans le chapitre de dérivation (Maths 1) le problème suivant : étant donnée une fonction F , trouver sa dérivée f c'est à dire la fonction $f(x) = F'(x)$.

Dans ce chapitre, nous considérons le problème inverse : étant donnée une fonction f , trouver une fonction F telle que sa dérivée soit égale à f , c'est à dire $F'(x) = f(x)$.

Intégrale indéfinie

Définition Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction, I est un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$.

On appelle primitive (ou intégrale indéfinie) de f toute fonction $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que

$$F'(x) = f(x), \quad x \in I.$$

Exemple $x \mapsto x^2$ est la primitive de $x \mapsto 2x$. La primitive de $x \mapsto \cos x$ est $x \mapsto \sin x$

Remarque (non unicité de primitives)

Soit $f(x) = 2x + 1$. On a

$$F(x) = x^2 + x, \quad G(x) = x^2 + x + c \quad (c \text{ est une constante})$$

sont deux primitives de f .

Théorème Si F_1, F_2 sont deux primitives de f , alors

$$F_1 - F_2 = c$$

Conclusion : Si on connaît une primitive F de f , toutes les autres primitives de f sont de la forme $F + c$.

Notation

L'ensemble des primitives d'une fonction f est noté $\int f$ ou encore $\int f(x)dx$

C'est-à-dire : $\int f(x)dx = F(x) + c$

où F est une primitive de f .

Proposition (Linéarité)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, f et $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions intégrables (admettent des primitives) et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx \quad \text{et} \quad \int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx$$

Primitives des fonctions usuelles

La fonction f	La primitive de f ($c \in \mathbb{R}$).	L'intervalle I
$f(x) = k$	$F(x) = kx + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R} - \{-1\}$	$F(x) = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + c$	$]0, +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln x + c$	$] -\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x + c$	$\mathbb{R}$

Techniques de calcul de primitives**a) Intégration par parties**

Proposition Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I .

On a

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

Preuve On a

$$\begin{aligned} (u(x)v(x))' &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ \Rightarrow \int (u(x)v(x))' dx &= \int u'(x)v(x)dx + \int u(x)v'(x)dx \\ \Rightarrow u(x)v(x) &= \int u'(x)v(x)dx + \int u(x)v'(x)dx \\ \Rightarrow \int u(x)v'(x)dx &= u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx \end{aligned}$$

Exemple $I = \int x \sin x \, dx$. Posons

$$u(x) = x \Rightarrow u'(x) = 1$$

$$v'(x) = \sin x \Rightarrow v(x) = -\cos x$$

Donc

$$\begin{aligned} \int x \sin x \, dx &= -x \cos x + \int \cos x \, dx \\ &= -x \cos x + \sin x + c \end{aligned}$$

Exercice calculer $I = \int x^2 e^x \, dx$

Solution Intégration par parties en posant :

$$u(x) = x^2 \Rightarrow u'(x) = 2x$$

$$v'(x) = e^x \Rightarrow v(x) = e^x$$

Donc

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2 \underbrace{\int x e^x \, dx}_{I_1}$$

Calculons $I_1 = \int x e^x \, dx$ par parties en posant

$$u(x) = x \Rightarrow u'(x) = 1$$

$$v'(x) = e^x \Rightarrow v(x) = e^x$$

$$\text{d'où : } I_1 = \int x e^x \, dx = x e^x - \int e^x \, dx = x e^x - e^x + c$$

$$\text{et } I = x^2 e^x - 2(x e^x - e^x) + c = (x^2 - 2x + 2)e^x + c$$

b) Intégration par changement de variable

Proposition Soit F une primitive de f et g une fonction dérivable. Alors la fonction $f(g(x))g'(x)$ est intégrable et l'on a

$$\int f(g(x))g'(x) \, dx = F(g(x)) + c.$$

Autrement dit, en posant $u = g(x)$ on obtient $\frac{du}{dx} = g'(x)$, soit encore $du = g'(x) \, dx$ et donc

$$\int f(g(x))g'(x) \, dx = \int f(u) \, du = F(u) + c$$

Exemple

$$\begin{aligned}\int \sqrt{\sin x} \cos x \, dx &= \int t^{\frac{1}{2}} \, dt, \quad t = \sin x, \quad dt = dx \cos x \\&= \frac{1}{\frac{1}{2}+1} t^{\frac{1}{2}+1} + c \\&= \frac{2}{3} \sin^{\frac{3}{2}} x + c \\&= \frac{2}{3} (\sqrt{\sin x})^3 + c.\end{aligned}$$

Remarque

$$\begin{aligned}\int \frac{g'(x)}{g(x)} \, dx &= \int \frac{1}{t} \, dt, \quad t = g(x), \quad dt = g'(x) \, dx \\&= \ln|t| + c \\&= \ln|g(x)| + c.\end{aligned}$$

Le succès de l'intégration dépend de notre habilité à choisir le changement de variable approprié qui simplifiera les calculs.

Exercice Calculer les primitives suivantes

$$\int \frac{1}{(x-1)^4} \, dx, \quad \int \tan x \, dx$$

Solution

1) On pose $t = x - 1 \Rightarrow dt = dx$, alors

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x-1)^4} \, dx &= \int \frac{1}{t^4} \, dt = \int t^{-4} \, dt \\&= \frac{-1}{3} t^{-3} + c \\&= \frac{-1}{3(x-1)^3} + c, \quad c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2) \int \tan x \, dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = - \int \frac{1}{t} \, dt \quad \text{On pose } t = \cos x, \quad \frac{dt}{dx} = -\sin x \Rightarrow dx = \frac{-1}{\sin x} \, dt \\&= -\ln|t| + c \\&= -\ln|\cos x| + c, \quad c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Exercice : Calculer les primitives suivantes:

$$(1.) \int \frac{1}{\sqrt{1+x}} dx, (2.) \int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx, (3.) \int \frac{1}{x \ln x} dx, (4.) \int e^x \sqrt{e^x + 1} dx \quad (5.) \int \frac{dx}{3 - 2e^x}.$$

Solution de L'exercice :

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x}} dx, \text{ on pose } t = x + 1 \Rightarrow dx = dt.$$

$$\text{Alors } \int \frac{1}{\sqrt{1+x}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \int t^{-\frac{1}{2}} dt$$

$$= \frac{1}{-\frac{1}{2} + 1} t^{-\frac{1}{2} + 1} + c$$

$$= 2t^{\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{x+1} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

$$\int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx, \text{ on pose } t = \ln x \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow dx = x dt.$$

$$\text{Alors } \int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx = \int \sin t dt = -\cos t + c$$

$$= -\cos(\ln x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

$$\int \frac{1}{x \ln x} dx = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} dx = \int \frac{u'(x)}{u(x)} dx \text{ avec } u(x) = \ln x$$

$$= \ln|u(x)| + c$$

$$= \ln|\ln x| + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

$$\int e^x \sqrt{e^x + 1} dx = \int e^x (e^x + 1)^{\frac{1}{2}} dx = \int u'(x) [u(x)]^{\frac{1}{2}} dx \text{ avec } u(x) = e^x + 1$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2} + 1} (e^x + 1)^{\frac{1}{2} + 1} + c$$

$$= \frac{2}{3} (e^x + 1)^{\frac{3}{2}} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

$$\int \frac{dx}{3 - 2e^x}, \text{ on pose } t = e^x \Rightarrow \frac{dt}{dx} = e^x \Rightarrow dx = \frac{1}{t} dt.$$

$$\text{Alors } \int \frac{dx}{3 - 2e^x} = \int \frac{dt}{t(3 - 2t)} = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{t} - \frac{1}{3} \int \frac{(-2)}{3 - 2t} dt$$

$$= \frac{1}{3} \ln|t| - \frac{1}{3} \ln|3 - 2t| + c$$

$$= \frac{1}{3} x - \frac{1}{3} \ln|3 - 2e^x| + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Intégration des fonctions rationnelles

Définition Un polynôme à coefficients dans K ($K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$) est une expression de la forme

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

avec $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, a_1, \dots, a_n \in K$.

L'ensemble des polynômes est noté $K[X]$.

Les a_i sont appelés les coefficients du polynôme ($0 \leq i \leq n$).

On appelle le degré de P le plus grand entier i tel que $a_i \neq 0$, on le note **deg P**

et on a

$$\int P(x) dx = \int (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0) dx$$

$$= \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n} x^n + \dots + \frac{a_2}{3} x^3 + \frac{a_1}{2} x^2 + a_0 x + c$$

Exemple $\int (x^2 + 2x + 5) dx = \frac{x^3}{3} + x^2 + 5x + c$

Définition Soit f une fonction. On dit que la fonction f est une fonction rationnelle si

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \text{ où } P(x), Q(x) \text{ sont des polynômes à coefficients réels.}$$

a) Intégrale du type : $\int \frac{1}{x+\lambda} dx$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\int \frac{1}{x+\lambda} dx = \ln|x+\lambda| + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

b) Intégrale du type : $\int \frac{1}{(x+\lambda)^n} dx$ et $n > 1$.

$$\int \frac{1}{(x+\lambda)^n} dx = \frac{1}{1-n} \frac{1}{(x+\lambda)^{n-1}} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

c) Intégrale du type : $\int \frac{\alpha x + \beta}{x^2 + ax + b} dx$ où α, β, a et $b \in \mathbb{R}$ avec $x^2 + ax + b$ possède deux racines réelles p et q , donc :

$$\frac{\alpha x + \beta}{x^2 + ax + b} = \frac{A}{x - p} + \frac{B}{x - q}$$

Par suite on a :

$$\begin{aligned} \int \frac{\alpha x + \beta}{x^2 + ax + b} dx &= \int \frac{A}{x - p} dx + \int \frac{B}{x - q} dx \\ &= A \ln|x - p| + B \ln|x - q| + c, \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Exemple Calculer $\int \frac{1}{x^2 - 1} dx$.

On a :

$$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{2(x - 1)} - \frac{1}{2(x + 1)}$$

Par suite on a :

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2 - 1} dx &= \int \frac{1}{2(x - 1)} dx - \int \frac{1}{2(x + 1)} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln|x - 1| - \frac{1}{2} \ln|x + 1| + c \end{aligned}$$

d) Intégrale du type : $\int \frac{\alpha x + \beta}{(x^2 + ax + b)^n} dx$ où $\alpha, \beta, a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ avec $\Delta = a^2 - 4b < 0$.

Proposition Soit $I_n = \int \frac{1}{(x^2 + 1)^n} dx$, $n \in \mathbb{N}^*$ alors .

- 1) $I_1 = \int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \arctan x + c$
- 2) $I_{n+1} = \frac{1}{2n} \frac{x}{(x^2 + 1)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n$, pour $n \geq 1$.

Preuve

1) évident car $(\arctan x)' = \frac{1}{x^2 + 1}$

2) $I_n = \int \frac{1}{(x^2 + 1)^n} dx$ par parties en posant :

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{(x^2 + 1)^n} \Rightarrow u'(x) = -2nx(x^2 + 1)^{-n-1} = \frac{-2nx}{(x^2 + 1)^{n+1}} \\ v'(x) &= 1 \Rightarrow v(x) = x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_n &= \int \frac{1}{(x^2+1)^n} dx = \frac{x}{(x^2+1)^n} + \int \frac{2nx^2}{(x^2+1)^{n+1}} dx \\
&= \frac{x}{(x^2+1)^n} + n \int \frac{2x^2 + 2 - 2}{(x^2+1)^{n+1}} dx \\
I_n &= \frac{x}{(x^2+1)^n} + n \int \frac{2}{(x^2+1)^n} dx - n \int \frac{2}{(x^2+1)^{n+1}} dx
\end{aligned}$$

alors $I_n = \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2nI_n - 2nI_{n+1}$.

Donc $I_{n+1} = \frac{1}{2n} \frac{x}{(x^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n$, pour $n \geq 1$.

- Calculons $\int \frac{\alpha x + \beta}{(x^2+ax+b)^n} dx$

1) si $\alpha \neq 0$ on a

$$\begin{aligned}
\int \frac{\alpha x + \beta}{(x^2+ax+b)^n} dx &= \frac{\alpha}{2} \int \frac{2x + \frac{2\beta}{\alpha}}{(x^2+ax+b)^n} dx = \frac{\alpha}{2} \int \frac{2x + a - a + \frac{2\beta}{\alpha}}{(x^2+ax+b)^n} dx \\
&= \frac{\alpha}{2} \int \frac{2x+a}{(x^2+ax+b)^n} dx + \frac{\alpha}{2} \int \frac{-a + \frac{2\beta}{\alpha}}{(x^2+ax+b)^n} dx \\
&= \frac{\alpha}{2} \int \frac{2x+a}{(x^2+ax+b)^n} dx + \frac{\alpha}{2} \left(-a + \frac{2\beta}{\alpha} \right) \int \frac{1}{(x^2+ax+b)^n} dx
\end{aligned}$$

A) $\int \frac{2x+a}{(x^2+ax+b)^n} dx$, On choisit $u(x) = x^2+ax+b \Rightarrow u'(x) = 2x+a$

$$\int \frac{2x+a}{(x^2+ax+b)^n} dx = \int \frac{u'(x)}{[u(x)]^n} dx = \begin{cases} \ln|u(x)| & \text{si } n=1 \\ \frac{1}{-n+1} [u(x)]^{-n+1} & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

B) $\int \frac{1}{(x^2+ax+b)^n} dx$

$x^2+ax+b = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{a^2}{4}\right)$, on pose $t = x + \frac{a}{2}$ et $k^2 = b - \frac{a^2}{4} > 0$, ($dx = dt$).

$$\int \frac{1}{(x^2+ax+b)^n} dx = \int \frac{1}{(t^2+k^2)^n} dt = \int \frac{1}{\left[k^2\left(\frac{t^2}{k^2} + 1\right)\right]^n} dt = \frac{1}{k^{2n}} \int \frac{1}{\left[\left(\frac{t}{k}\right)^2 + 1\right]^n} dt$$

on choisit $s = \frac{t}{k} \Rightarrow ds = \frac{1}{k} dt \Rightarrow dt = kds$

$$\int \frac{1}{(x^2+ax+b)^n} dx = \frac{k}{k^{2n}} \int \frac{1}{(s^2+1)^n} ds \quad (\text{voir la proposition})$$

1) si $\alpha = 0$ on a

$$\int \frac{\alpha x + \beta}{(x^2 + ax + b)^n} dx = \int \frac{\beta}{(x^2 + ax + b)^n} dx = \beta \int \frac{1}{(x^2 + ax + b)^n} dx \quad (\text{voir } (\mathbf{B})) .$$

Exemple Calculer $\int \frac{3x+6}{(x^2+x+1)^2} dx$.

$$\begin{aligned} \int \frac{3x+6}{(x^2+x+1)^2} dx &= \frac{3}{2} \int \frac{2x+4}{(x^2+x+1)^2} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x+1+3}{(x^2+x+1)^2} dx \\ &= \frac{3}{2} \int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} dx + \frac{3}{2} \int \frac{3}{(x^2+x+1)^2} dx \\ &= \frac{3}{2} \int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} dx + \frac{9}{2} \int \frac{1}{(x^2+x+1)^2} dx \end{aligned}$$

A) $\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} dx$, par changement de variable $u(x) = x^2 + x + 1 \Rightarrow u'(x) = 2x + 1$

on obtient :

$$\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} dx = \int \frac{u'(x)}{(u(x))^2} dx = \frac{-1}{u(x)} = \frac{-1}{x^2+x+1} .$$

B) $\int \frac{1}{(x^2+x+1)^2} dx = ?$

$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$, par changement de variable $t = x + \frac{1}{2} \Rightarrow dx = dt$ on obtient

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x^2+x+1)^2} dx &= \int \frac{1}{\left(t^2 + \frac{3}{4}\right)^2} dt = \int \frac{1}{\left(t^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)^2} dt \\ &= \frac{16}{9} \int \frac{1}{\left(\left(\frac{2t}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right)^2} dt \end{aligned}$$

par changement de variable $s = \frac{2t}{\sqrt{3}} \Rightarrow ds = \frac{2}{\sqrt{3}} dt$, $(dt = \frac{\sqrt{3}}{2} ds)$ on obtient :

$$\int \frac{1}{(x^2+x+1)^2} dx = \frac{16}{9} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \underbrace{\int \frac{1}{(s^2+1)^2} ds}_{I_2}, \text{ d'après } \left(I_{n+1} = \frac{1}{2n} \frac{x}{(x^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n \right)$$

$$I_2 = \int \frac{1}{(s^2+1)^2} ds = \frac{1}{2} \frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{2} \arctan s, \quad (n=1)$$

Finalement (On a $s = \frac{2t}{\sqrt{3}}$ et $t = x + \frac{1}{2}$ alors $s = \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$)

$$\int \frac{3x+6}{(x^2+x+1)^2} dx = \frac{3}{2} \frac{-1}{x^2+x+1} + \frac{9}{2} \left[\frac{16}{9} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1}{2} \frac{\frac{2x+1}{\sqrt{3}}}{\left(\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right)^2 + 1 \right)} + \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right) \right) \right] + c.$$

Décomposition en éléments simples

Soit $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ une fonction rationnelle par la division euclidienne on obtient :

$$P(x) = Q(x)q(x) + R(x) \text{ telque } \deg R \leq \deg Q.$$

$$\text{Donc } f(x) = q(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

$$\text{On en déduit que : } \int f(x)dx = \int q(x)dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)} dx.$$

Si

$$Q(x) = c(x-a_1)^{m_1}(x-a_2)^{m_2} \dots (x-a_k)^{m_k}(x^2+b_1x+d_1)^{n_1}(x^2+b_2x+d_2)^{n_2} \dots (x^2+b_hx+d_h)^{n_h}$$

on peut écrire

$$\begin{aligned} \frac{R(x)}{Q(x)} &= \frac{A_{1,1}}{x-a_1} + \frac{A_{1,2}}{(x-a_1)^2} + \dots + \frac{A_{1,m_1}}{(x-a_1)^{m_1}} \\ &+ \frac{A_{2,1}}{x-a_2} + \frac{A_{2,2}}{(x-a_2)^2} + \dots + \frac{A_{2,m_2}}{(x-a_2)^{m_2}} \\ &+ \dots + \\ &+ \frac{A_{k,1}}{x-a_k} + \frac{A_{k,2}}{(x-a_k)^2} + \dots + \frac{A_{k,m_k}}{(x-a_k)^{m_k}} \\ &+ \frac{B_{1,1}x+C_{1,1}}{x^2+b_1x+d_1} + \frac{B_{1,2}x+C_{1,2}}{(x^2+b_1x+d_1)^2} + \dots + \frac{B_{1,n_1}x+C_{1,n_1}}{(x^2+b_1x+d_1)^{n_1}} \\ &+ \frac{B_{2,1}x+C_{2,1}}{x^2+b_2x+d_2} + \frac{B_{2,2}x+C_{2,2}}{(x^2+b_2x+d_2)^2} + \dots + \frac{B_{2,n_2}x+C_{2,n_2}}{(x^2+b_2x+d_2)^{n_2}} \\ &+ \dots + \\ &+ \frac{B_{h,1}x+C_{h,1}}{x^2+b_hx+d_h} + \frac{B_{h,2}x+C_{h,2}}{(x^2+b_hx+d_h)^2} + \dots + \frac{B_{h,n_h}x+C_{h,n_h}}{(x^2+b_hx+d_h)^{n_h}} \end{aligned}$$

où les $A_{i,j}$, $B_{i,j}$ et $C_{i,j}$ sont des constantes.

Exemple $f(x) = \frac{3x^3+2x-5}{3x^2-5x-2}$. On effectue d'abord la division euclidienne

$$\begin{array}{r|l}
 3x^3 + 2x - 5 & 3x^2 - 5x - 2 \\
 \underline{3x^3 - 5x^2 - 2x} & x + \frac{5}{3} \\
 5x^2 + 4x - 5 & \\
 \underline{5x^2 - \frac{25}{3}x - \frac{10}{3}} & \\
 \frac{37}{3}x - \frac{5}{3} &
 \end{array}$$

Ainsi $f(x) = x + \frac{5}{3} + \frac{\frac{37}{3}x - \frac{5}{3}}{3x^2 - 5x - 2}$. Maintenant on décompose le terme $\frac{\frac{37}{3}x - \frac{5}{3}}{3x^2 - 5x - 2}$ en fractions simples on a $3x^2 - 5x - 2 = 3(x + \frac{1}{3})(x - 2)$ et on doit chercher les deux constantes A_1 et A_2 telles que

$$\frac{\frac{37}{3}x - \frac{5}{3}}{3x^2 - 5x - 2} = \frac{A_1}{3x + 1} + \frac{A_2}{x - 2}.$$

En utilisant le principe d'identité des polynômes on a

$$\begin{aligned}
 \frac{\frac{37}{3}x - \frac{5}{3}}{3x^2 - 5x - 2} &= \frac{A_1(x - 2) + A_2(3x + 1)}{3x^2 - 5x - 2} = \frac{(A_1 + 3A_2)x - 2A_1 + A_2}{3x^2 - 5x - 2} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1 + 3A_2 = \frac{37}{3} \\ -2A_1 + A_2 = -\frac{5}{3} \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} A_1 = \frac{52}{21} \\ A_2 = \frac{23}{7} \end{cases}
 \end{aligned}$$

On conclut que

$$f(x) = x + \frac{5}{3} + \frac{52/21}{3x + 1} + \frac{23/7}{x - 2}$$

et

$$\int f(x)dx = \frac{x^2}{2} + \frac{5}{3}x + \frac{52}{63}\ln|3x + 1| + \frac{23}{7}\ln|x - 2| + c.$$

Exemple $f(x) = \frac{x-4}{(x-3)(x+1)^2}$. On doit d'abord la décomposer en fraction simples, la fonction f admet la décomposition

$$f(x) = \frac{A_1}{x - 3} + \frac{A_2}{x + 1} + \frac{A_3}{(x + 1)^2}.$$

On détermine les constantes en utilisant le principe d'identité des polynômes

$$\begin{aligned} \frac{x-4}{(x-3)(x+1)^2} &= \frac{A_1(x+1)^2 + A_2(x-3)(x+1) + A_3(x-3)}{(x-3)(x+1)^2} \\ &= \frac{(A_1 + A_2)x^2 + (2A_1 - 2A_2 + A_3)x + A_1 - 3A_2 - 3A_3}{(x-3)(x+1)^2} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1 + A_2 = 0 \\ 2A_1 - 2A_2 + A_3 = 1 \\ A_1 - 3A_2 - 3A_3 = -4 \end{cases} \end{aligned}$$

On conclut que

$$f(x) = \frac{-1/16}{x-3} + \frac{1/16}{x+1} + \frac{5/4}{(x+1)^2}$$

et

$$\int f(x)dx = -\frac{1}{16}\ln|x-3| + \frac{1}{16}\ln|x+1| - \frac{5/4}{x+1} + c.$$

Intégration des fractions rationnelles en e^x

On utilise le changement de variable $t = e^x$ et donc $dt = e^x dx$ ou $dx = \frac{1}{t} dt$

Exemple Calculer $\int \frac{dx}{1+e^x}$. On a

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1+e^x} &= \int \frac{dt}{t(1+t)} \\ &= \int \frac{1}{t} dt - \int \frac{1}{t+1} dt \\ &= \ln|t| - \ln|t+1| + c. \end{aligned}$$

Intégrale du type $\int P(x)e^{\alpha x} dx$ où P est un polynôme et $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

$\int P(x)e^{\alpha x} dx$ peut se calculer par une intégration par parties. Mais on peut encore remarquer que

$$\int P(x)e^{\alpha x} dx = Q(x)e^{\alpha x}$$

où $Q(x)$ est un polynôme de même degré que $P(x)$ que l'on déterminera par identification.

Exemple Calculer $I = \int (x^2 + x + 1)e^{-x} dx$. On sait que $I = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ et on obtient a, b, c de la formule

$$(x^2 + x + 1)e^{-x} = [(ax^2 + bx + c)e^{-x}]'.$$

On aura $a = -1, b = -3$ et $c = -4$. Finalement, $I = (-x^2 - 3x - 4)e^{-x}$.

Intégration de certaines fonctions trigonométriques

A) Transformation en une intégrale de fonctions rationnelles :

Soit une intégrale de la forme $\int f(\sin x, \cos x) dx$. En effectuant le changement de variable $t = \tan \frac{x}{2}$, les fonctions $\sin x$ et $\cos x$ s'expriment alors sous formes de fonctions rationnelles.

En effet

$$\begin{aligned}\sin x &= \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \\ &= \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{1} = \frac{\frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}}{\frac{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}} \\ &= \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos x &= \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \\ &= \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{1} = \frac{\frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}}{\frac{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}} \\ &= \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}t = \tan \frac{x}{2} &\Rightarrow \frac{x}{2} = \arctan t \\ &\Rightarrow x = 2 \arctan t \\ &\Rightarrow dx = \frac{2}{1 + t^2} dt.\end{aligned}$$

Donc on a :

$$t = \tan \frac{x}{2} \Rightarrow dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\tan x = \frac{2t}{1-t^2}$$

$$\cot x = \frac{1-t^2}{2t}.$$

Exemple Calculer $\int \frac{1}{\sin x} dx$.

On a :

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sin x} dx &= \int \frac{1+t^2}{2t} \frac{2}{1+t^2} dt \\ &= \int \frac{1}{t} dt = \ln|t| + c \\ &= \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + c \end{aligned}$$

B) Les intégrales de types : $\int \cos^n x dx$. Ou $\int \sin^n x dx$.

Premier cas : n est impair.

On utilise la formule $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$: pour l'indice $n - 1$ qui est une puissance paire, ce qui permet de donner une intégrale de type

$$\int f'(x)[f(x)]^m dx .$$

Exemple :

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x dx &= \int \sin^2 x \sin x dx = \int (1 - \cos^2 x) \sin x dx \\ &= \int (\sin x - \cos^2 x \sin x) dx \\ &= \int \sin x dx + \int (-\sin x) \cos^2 x dx = -\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x + c, c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Deuxième cas : n est pair.

Dans ce cas on utilise la forme linéaire de $\sin^2 x$ et $\cos^2 x$ c'est-à-dire les deux formules $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$ et $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$.

Exemple :

$$\begin{aligned}\int \cos^4 x \, dx &= \int (\cos^2 x)^2 dx = \int \left[\frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \right]^2 dx \\ &= \frac{1}{4} \int (1 + \cos^2 2x + 2 \cos 2x) dx \\ &= \int \frac{1}{4} dx + \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx + \frac{1}{4} \int \cos^2 2x \, dx \\ &= \frac{x}{4} + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{4} \int \cos^2 2x \, dx.\end{aligned}$$

mais dans $\int \cos^2 2x \, dx$ on pose : $t = 2x \Rightarrow dt = 2 \, dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{2}$.

$$\begin{aligned}\int \cos^2 2x \, dx &= \frac{1}{2} \int \cos^2 t \, dt = \frac{1}{2} \int \frac{1}{2}(1 + \cos 2t) dt \\ &= \int \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cos 2t \right) dt \\ &= \int \frac{1}{4} dt + \frac{1}{4} \int \cos 2t \, dt \\ &= \frac{t}{4} + \frac{1}{8} \sin 2t + c_1 \\ &= \frac{x}{2} + \frac{1}{8} \sin 4x + c_1\end{aligned}$$

Donc

$$\int \cos^4 x \, dx = \frac{x}{4} + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{x}{8} + \frac{1}{32} \sin 4x + c$$

C) Intégrale de type : $\int \cos^n x \sin^m x \, dx$, n et $m \in \mathbb{N}$

Premier cas : l'un des deux indices (n ; m) est un entier impair.

C'est pratiquement la même chose comme (B) on applique la même méthode pour l'indice impair, mais si les deux sont impairs alors le meilleur choix est le plus petit.

Exemple Calculer $I = \int \cos^5 x \sin^2 x \, dx$. On a

$$\begin{aligned}
 I &= \int \cos^4 x \sin^2 x \cos x \, dx \\
 &= \int (1 - \sin^2 x)^2 \sin^2 x \cos x \, dx \\
 &= \int (1 + \sin^4 x - 2 \sin^2 x) \sin^2 x \cos x \, dx \\
 &= \int (\sin^2 x \cos x + \sin^6 x \cos x - 2 \sin^4 x \cos x) \, dx \\
 &= \int \sin^2 x \cos x \, dx + \int \sin^6 x \cos x \, dx - 2 \int \sin^4 x \cos x \, dx \\
 &= \frac{1}{3} \sin^3 x + \frac{1}{7} \sin^7 x - \frac{2}{5} \sin^5 x + c, \quad c \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

Exemple Calculer $I = \int \cos^6 x \sin^3 x \, dx$. On a

$$\begin{aligned}
 I &= \int \cos^6 x \sin^2 x \sin x \, dx \\
 &= \int \cos^6 x (1 - \cos^2 x) \sin x \, dx \\
 &= \int (\cos^6 x \sin x - \cos^8 x \sin x) \, dx \\
 &= - \int \cos^6 x (-\sin x) \, dx + \int \cos^8 x (-\sin x) \, dx \\
 &= -\frac{1}{7} \cos^7 x + \frac{1}{9} \cos^9 x + c, \quad c \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

Exemple Calculer $I = \int \cos^7 x \sin^5 x \, dx$. On a

$$\begin{aligned}
 I &= \int \cos^7 x \sin^5 x \, dx = \int (\sin^2 x)^2 \sin x \cos^7 x \, dx \\
 &= \int (1 - \cos^2 x)^2 \sin x \cos^7 x \, dx \\
 &= - \int \cos^7 x (-\sin x) \, dx - \int \cos^{11} x (-\sin x) \, dx + 2 \int \cos^9 x (-\sin x) \, dx \\
 I &= -\frac{1}{8} \cos^8 x - \frac{1}{12} \cos^{12} x + \frac{2}{10} \cos^{10} x + c, \quad c \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

Deuxième cas : Les deux indices (n ; m) sont des entiers pairs.

On applique la formule suivante: $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$ et la forme linéaire de cosinus ou sinus

Exemple Calculer $I = \int \cos^4 x \sin^4 x \, dx$. On a

$$I = \frac{1}{16} \int (\sin 2x)^4 dx = \frac{1}{32} \int \sin^4 t \, dt. \quad \text{qui est de type (B).}$$

D) Intégrale de type $\int \cos \alpha x \cos \beta x \, dx$, $\int \sin \alpha x \sin \beta x \, dx$, $\int \sin \alpha x \cos \beta x \, dx$, α et $\beta \in \mathbb{R}^*$.

On utilise les formules suivantes :

$$\cos \alpha x \cos \beta x = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta)x + \cos(\alpha - \beta)x]$$

$$\sin \alpha x \sin \beta x = \frac{1}{2} [-\cos(\alpha + \beta)x + \cos(\alpha - \beta)x]$$

$$\sin \alpha x \cos \beta x = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta)x + \sin(\alpha - \beta)x].$$

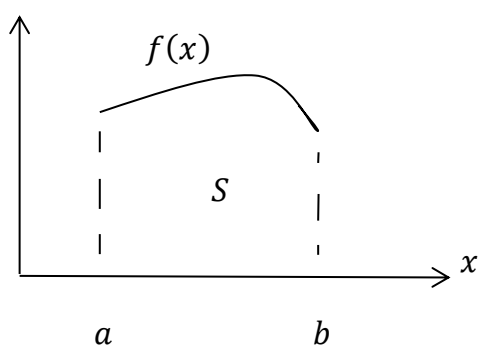
Exemple Calculer $\int \sin 4x \sin 3x \, dx$

$$\begin{aligned} \int \sin 4x \sin 3x \, dx &= \frac{1}{2} \int [-\cos 7x + \cos x] \, dx \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{7} \sin 7x + \sin x \right] + c \\ &= -\frac{1}{14} \sin 7x + \frac{1}{2} \sin x + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

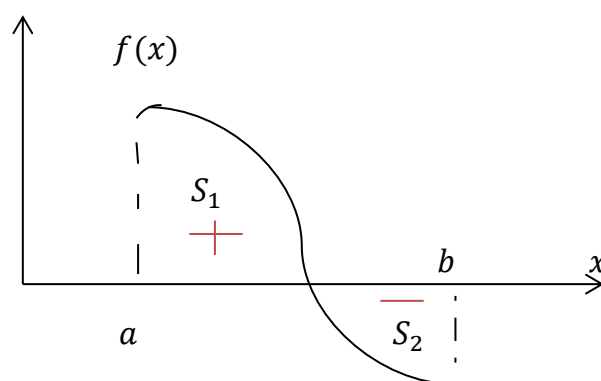
Intégrale définie

Interprétation géométrique

L'intégrale définie de f entre a et b , notée $\int_a^b f(x) \, dx$



$$I = S$$



$$I = S_1 - S_2$$

Définition Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. L'intégrale définie de f entre a et b est le nombre réel défini par :

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

où F est une primitive de f sur $[a, b]$.

Remarque

➤ Il y a une différence entre l'intégrale définie et l'intégrale indéfinie d'une fonction

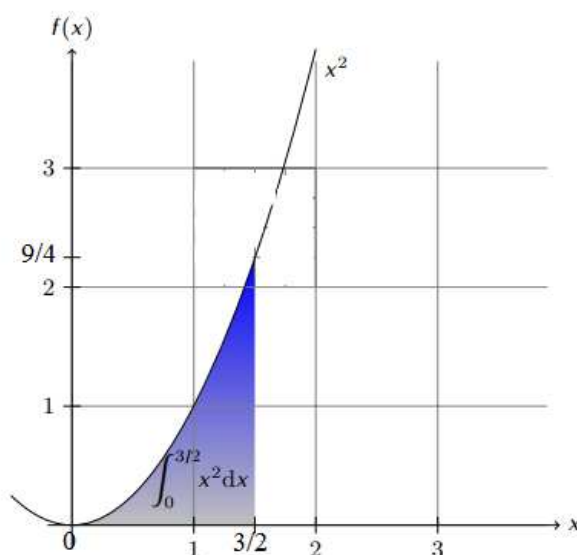
$\int f(x) dx$ s'appelle une intégrale indéfinie de f , c'est une fonction primitive de f .

$\int_a^b f(x) dx$ s'appelle une intégrale définie de f , c'est un nombre réel.

➤ $\int_a^b f'(x) dx = [f(x)]_a^b = f(b) - f(a)$.

Exemple

$$\int_0^{\frac{3}{2}} x^2 dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} \left(\frac{3}{2} \right)^3 = \frac{9}{8}.$$



Exercice Calculer $\int_1^2 x^2 \ln x dx$

Solution : (intégration par parties)

$$\int x^2 \ln x \, dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^3}{3} \frac{1}{x} dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + c$$

Donc

$$\int_1^2 x^2 \ln x \, dx = \left[\frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + c \right]_1^2 = \frac{8}{3} \ln 2 - \frac{8}{9} + c - \left(-\frac{1}{9} + c \right) = \frac{8}{3} \ln 2 - \frac{7}{9}.$$

Proposition (opérations élémentaires)

Soient f et g deux fonctions intégrables sur l'intervalle $[a, b]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors on a :

- 1) $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$
- 2) $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$
- 3) $\int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx.$
- 4) $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$, tel que $a \leq c \leq b$. relation de Chasles.
- 5) $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$
- 6) Si $f(x) = 0 \, \forall x \in [a, b]$ alors $\int_a^b f(x) dx = 0.$
- 7) Si $f(x) \leq g(x) \, \forall x \in [a, b]$ alors $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$
- 8) Si $n \leq f(x) \leq m, \, \forall x \in [a, b]$ (tels que $n, m \in \mathbb{R}$) alors

$$n(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq m(b-a).$$

- 9) Si $n \leq f(x) \leq m$, et $g(x) \geq 0 \, \forall x \in [a, b]$ (tels que $n, m \in \mathbb{R}$) alors

$$n \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x) g(x) dx \leq m \int_a^b g(x) dx.$$

- 10) $f \times g$ est une fonction intégrable sur $[a, b]$ mais en général

$$\int_a^b f(x) g(x) dx \neq \left(\int_a^b f(x) dx \right) \left(\int_a^b g(x) dx \right)$$

Preuve de (5) : On a

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \quad \forall x \in [a, b],$$

par suite

$$-\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

c'est à dire

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$