

Table des Matières

1	Calcul des variations	2
1.1	Cas particuliers	3

Chapitre 1

Calcul des variations

Soit L une fonction de classe C^2 :

$$\begin{aligned} L &: [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ (s, x, y) &\rightarrow L(s, x, y) \end{aligned}$$

et $C^2([a, b], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 .

Le problème de base dans le sujet qui est appelé le calcul des variations est:

Minimiser une fonctionnelle intégrale du type

$$I(f) := \int_a^b L(s, f(s), f'(s)) ds \quad (1.0.1)$$

avec $f \in C^2([a, b], \mathbb{R})$, $f(a) = \alpha$ et $f(b) = \beta$.

Les dérivées partielles de la fonction $L(s, x, y)$ par rapport à y et à z sont notés L_x et L_y .

Théorème 1.0.1 (Euler 1744) Si $\bar{x}$ est une solution de (1.0.1), alors $\bar{x}$ satisfait la relation d'Euler-Lagrange

$$\frac{\partial}{\partial s} \{L_y(s, \bar{x}(s), \bar{x}'(s))\} = L_x(s, \bar{x}(s), \bar{x}'(s)), \forall s \in [a, b].$$

Preuve. On définit la fonction g comme suit:

$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tel que $g(\lambda) = I(\bar{x} + \lambda y)$.

et $y \in C^2([a, b], \mathbb{R})$ avec $y(a) = 0$ et $y(b) = 0$.

Alors on a $g(\lambda) = \int_a^b L(s, \bar{x}(s) + \lambda y(s), \bar{x}'(s) + \lambda y'(s)) ds$

donc $g'(\lambda) = \int_a^b L_x(s, \bar{x}(s) + \lambda y(s), \bar{x}'(s) + \lambda y'(s)) y(s) + L_y(s, \bar{x}(s) + \lambda y(s), \bar{x}'(s) + \lambda y'(s)) y'(s) ds$

On remarque que

$$g(\lambda) = I(\bar{x} + \lambda y) \geq I(\bar{x}) = g(0).$$

donc $g'(0) = 0$.

$$g'(0) = \int_a^b L_x(s, \bar{x}(s), \bar{x}'(s)) y(s) + L_y(s, \bar{x}(s), \bar{x}'(s)) y'(s) ds = 0$$

$$\text{i.e., } \int_a^b [L_x(s, \bar{x}(s), \bar{x}'(s)) - \frac{\partial}{\partial s} \{L_y(s, \bar{x}(s), \bar{x}'(s))\}] y(s) ds = 0$$

$$\text{finalement } \frac{\partial}{\partial s} \{L_y(s, \bar{x}(s), \bar{x}'(s))\} = L_x(s, \bar{x}(s), \bar{x}'(s)), \forall s \in [a, b]. \blacksquare$$

1.1 Cas particuliers

1) $L_x = 0$ c'est à dire L ne dépend pas de x

Soit $\bar{x}$ un mim de I donc

$$L_y(\bar{x}(s)) = \text{constance}, \forall s \in [a, b].$$

2) L ne dépend pas de s

.....exercice

3) L ne dépend pas de x et y

.....exercice

Exemple 1 $L(t, x, y) = 1 + y^2$.

$$\begin{aligned} I(x) &:= \int_a^b L(s, f(t), f'(s)) ds \\ &= \int_a^b 1 + (f'(s))^2 ds \end{aligned}$$

Soit $\bar{x}$ un mim de I donc

$$\frac{\partial}{\partial s} \{L_y(s, \bar{x}(s), \bar{x}'(s))\} = L_x(s, \bar{x}(s), \bar{x}'(s)), \forall s \in [a, b]$$

$$\text{i.e., } 2\bar{x}''(s) = 0, \forall s \in [a, b]$$

Exemple 2 $L(t, x, y) = x^2 + y^2$

Soit $\bar{x}$ un mim de I donc

$$\frac{\partial}{\partial s} \{L_y(s, \bar{x}(t), \bar{x}'(s))\} = L_x(s, \bar{x}(t), \bar{x}'(s)), \forall s \in [a, b]$$

alors

$$2\bar{x}''(t) = 2\bar{x}'(t)$$

c'est à dire

$$\bar{x}''(t) - \bar{x}'(t) = 0$$

Exemple 3 $L(t, x, y) = x + y$

.....meme method.