FACULTE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES
Département de Electrotechnique et Automatique

Année universitaire : 2021 – 2022
Module : identification des systèmes **Niveau : M1**

Fiche de TD N°2

Exercice Nº1

Soit un ensemble de mesures $y_i$dont le modèle est $x(t) = a\ t.$ Les mesures sont les suivantes :

t_i	1	2	3
y_i	y_1	y_2	y_3

1) Déterminer la valeur optimale $\hat{a}$du modèle pour le jeu de mesures considéré, en utilisantla méthode des moindres carrés simples.
2) Déduire la valeur optimale $\hat{a}$ si y_1=1.9, y_2=4.1 et y_3=5.9.
3) Calculer l'erreur.

   Tracer dans le même graphe les mesures expérimentales avec le modèle identifié

Exercice Nº1

Soit un ensemble de mesures y_i dont le modèle est $x(t) = a\ t.$ Les mesures sont lessuivantes :

t_i	1	2	3	4
y_i	1.9	4.1	5.9	8.2

1) Déterminer la valeur optimale $\hat{a}$ du modèle pour le jeu de mesures considéré, en utilisantla méthode des moindres carrés simples et matricielle et symétrique
2) Définir les éléments intervenant dans la méthode de récurrence générale, en particulier K_{k+1} P_{k+1} et ϕ_{k+1}. Pour des valeurs initiales P_0=100 et $\hat{a}_0 = 1,$ déterminer les estimations successives $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3$et $\hat{a}_4$.

Solution de la fiche TD N° 2

identification des systèmes

Exercice N° 1;

t_i	1	2	3	
y_i	y_1	y_2	y_3	

$x(t) = at$

(1) Déterminer la valeur optimale $\hat{a}$ du modèle pour le jeu des mesures considéré, en utilisant la méthode des moindres carrés simples.

$$\varepsilon_i = \sum_i^N (y_i - x_i)^2 ; \quad J = \sum_i^N \varepsilon_i^2$$

pour $N = 3$

$$\varepsilon_i = \sum_{i=1}^{3} (y_i - x_i)^2 ; \quad J = \sum_{i=1}^{3} \varepsilon_i^2$$

pour $t_1 = 1$
$x_1 = a$
pour $t_2 = 2$
$x_2 = 2a$
pour $t_2 = 3$
$x_3 = 3a$

$$J = (y_1 - a)^2 + (y_2 - 2a)^2 + (y_3 - 3a)^2$$

$$J = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - (2y_1 + 4y_2 + 6y_3)a + 14a^2$$

la loi optimale $\frac{\partial J}{\partial a} = 0$

$$\frac{\partial J}{\partial a} = 0 \Rightarrow -2y_1 - 4y_2 - 6y_3 + 28\hat{a} = 0$$

$$\longrightarrow \boxed{\hat{a} = \frac{2y_1 + 4y_2 + 6y_3}{28}}$$

Solution de la fiche TD N° 2

identification des systèmes

② Déduire la valeur optimale $\hat{a}$ si $y_1 = 1,9$, $y_2 = 4,1$ et $y_3 = 5,9$

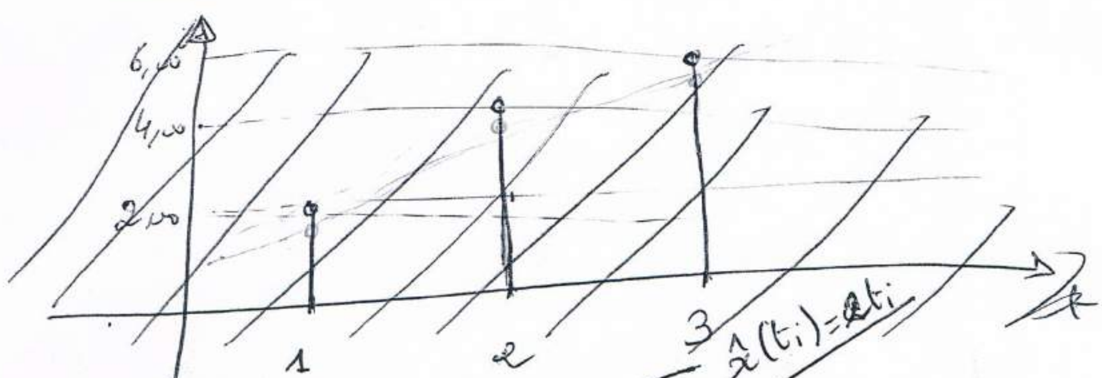
$$\hat{a} = \frac{2y_1 + 4y_2 + 6y_3}{28} = \frac{2 \times 1,9 + 4 \times 4,1 + 5,9 \times 6}{28} = \frac{56,1}{28} \simeq 2$$

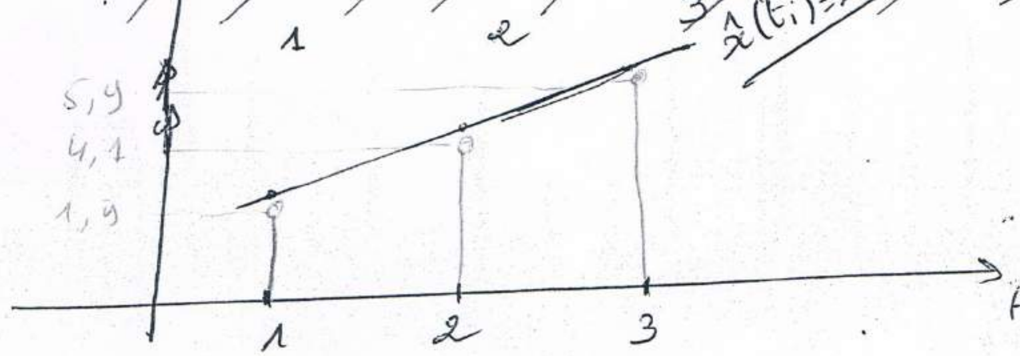
$$\boxed{\hat{a} = 2}$$

③ Calculer l'erreur :

$$x_i = \overset{\hat{a}}{2}\, t$$

t	1	2	3
y_i	1,9	4,1	5,9
x_i	2,00	4,00	6,00
e_i	0,1	0,1	0,1





Solution de la Fiche TD N°3 : identification des systèmes.

Exercice N°2

Soit un ensemble de mesures le modèle est $x(t) = at$.

t_i	1	2	3	4
y_i	1,9	4,1	5,9	8,2
x_i	a	$2a$	$3a$	$4a$

* Moinders carrés simples :

$$\varepsilon_i = \sum_i^N (y_i - x_i)^2 ; \quad J = \sum_i^N \varepsilon_i^2$$

$$\begin{cases} x_1 = a \\ x_2 = 2a \\ x_3 = 3a \\ x_4 = 4a \end{cases}$$

$$J = (y_1 - a)^2 + (y_2 - 2a)^2 + (y_3 - 3a)^2 + (y_4 - 4a)^2$$

$$\frac{\partial J}{\partial a} = 0 \Rightarrow -2(y_1 - a) - 4(y_2 - 2a) - 6(y_3 - 3a) - 8(y_4 - 4a) = 0$$

$$\Rightarrow -2y_1 + 2a - 4y_2 + 8a - 6y_3 + 18a - 8y_4 + 32a = 0$$

$$-(2y_1 + 4y_2 + 6y_3 + 8y_4) + 60a = 0$$

$$\rightarrow \boxed{\hat{a} = \frac{y_1 + 2y_2 + 3y_3 + 4y_4}{30}} \qquad \begin{cases} y_1 = 1,9 \\ y_2 = 4,1 \\ y_3 = 5,9 \\ y_4 = 8,2 \end{cases}$$

$$\boxed{\hat{a} = \frac{60,6}{30} = 2,02}$$

Solution de la fiche TD N°3
identification des systèmes.

* Matricielle:

$$\hat{\theta} = (H^T H)^{-1} H^T . Y \quad \Rightarrow H = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} ; \; Y = \begin{bmatrix} 1,9 \\ 4,1 \\ 5,9 \\ 8,2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{a} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,9 \\ 4,1 \\ 5,9 \\ 8,2 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\hat{a} = 2,02}$$

2) Méthode Moindres carrés récursifs:

$$\begin{cases} \hat{\theta}(k+1) = \hat{\theta}(k) + K(k+1)\left[y(k+1) - \phi^T(k+1)\,\theta(k)\right] \\ K(k+1) = \dfrac{P(k)\,\phi(k+1)}{1 + \phi^T(k+1)\,P(k)\,\phi(k+1)} \\ P(k+1) = \left(I - K(k+1)\,\phi^T(k+1)\right)P(k) \end{cases}$$

pour l'exercice on pose $\hat{\theta}_{k+1} \to \hat{a}_{k+1}$ $\quad a_0 = 1$

$$\phi = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} ; \; Y = \begin{bmatrix} 1,9 \\ 4,1 \\ 5,9 \\ 8,2 \end{bmatrix} ; \; P_0 = 100$$

* pour $k = 0$;

$$\hat{a}_{k+1} = \hat{a}_k + K_{k+1}\left[y_{k+1} - \phi_{k+1}^T\, a_k\right]$$

$$\hat{a}_1 = \hat{a}_0 + K_1\left[y_1 - \phi_1^T\, a_0\right]$$

$$K_{k+1} = \frac{P_k\,\phi_{k+1}}{1 + \phi_{k+1}^T\, P_k\, \phi_{k+1}}$$

Solution de la fiche TD N°3

identification des systèmes.

$$K_1 = \frac{P_0\ \phi_1}{1+\phi_1^T P_0 \phi_1} = \frac{100 \times 1}{1+1\times 100\times 1} = \frac{100}{101} = 0,99$$

$\boxed{K = 0,99}$

$$\hat{a}_1 = \hat{a}_0 + K_1 \left[y_1 - \phi_1^T \hat{a}_0 \right]$$
$$= 1 + 0,99 \left[1,9 - 1\times 1 \right] = 1 + 0,99 \left[0,9 \right] = 1,891$$

$\longrightarrow \boxed{\hat{a}_1 = 1,891}$

$$P_1 = (1 - K_1 \phi_1^T) P_0 = (1 - 0,99 \times 1) \times 100 = 1$$

$\boxed{P_1 = 1}$

pour $k = 2$;

$$K_2 = \frac{P_1\ \phi_2}{1+\phi_2^T P_1 \phi_2} = \frac{1\times 2}{1+2\times 1\times 2} = \frac{2}{5} = 0,4$$

$\boxed{K_2 = 0,4}$

$$\hat{a}_2 = \hat{a}_1 + K_2 \left[y_2 - \phi_2^T \cdot \hat{a}_1 \right]$$
$$= 1,891 + 0,4 \left[4,1 - 2 \times 1,891 \right] = 2,0182$$

$\boxed{\hat{a}_2 = 2,0182}$

$$P_2 = (1 - K_2 \phi_2^T) P_1 = (1 - 0,4 \times 2) \cdot 1 = 0,2$$

$\boxed{P_2 = 0,2}$

Solution de la fiche TD N°3

identification des systèmes

pour $k = 2$;

$$\hat{a}_3 = \hat{a}_2 + K_3 \left[y_3 - \phi_3^T \hat{a}_2 \right]$$

$$K_3 = \frac{P_2 \phi_3}{1 + \phi_3^T P_2 \phi_3} = \frac{0,2 \times 3}{1 + 3 \times 0,2 \times 3} = 0,2143 \,; \quad \boxed{K_3 = 0,2143}$$

$$\hat{a}_3 = 2,0182 + 0,2143 \left[5,9 - 3 \times 2,0182 \right] = 1,98507$$

$$\boxed{\hat{a}_3 = 1,98507}$$

$$P_3 = \left(1 - K_3 \phi_3^T \right) P_2 = \left(1 - 0,2143 \times 3 \right) \cdot 0,2 = 0,07142$$

$$\boxed{P_3 = 0,07142}$$

pour $k = 3$:

$$\hat{a}_4 = \hat{a}_3 + K_4 \left[y_4 - \phi_4^T \hat{a}_3 \right]$$

$$K_4 = \frac{P_3 \phi_4}{1 + \phi_4^T P_3 \phi_4} = \frac{0,07142 \times 4}{1 + 4 \times 0,07142 \times 4} = 0,133326$$

$$\boxed{K_4 = 0,133326}$$

$$\hat{a}_4 = 1,98507 + 0,133326 \times \left[8,2 - 4 \times 1,98507 \right]$$

$$\boxed{\hat{a}_4 = 2,019697} \Rightarrow \boxed{\hat{a}_4 \simeq 2,02}$$

ok