



Chapitre III

Mécanique Non Linéaire de la rupture (MNLR)

Plan du cours

1. Introduction à la Mécanique Non Linéaire de Rupture (MNLR)
2. Critère de rupture basé sur l'ouverture de fissure
3. Evaluation de la zone plastique par les modèles d'Irwin et de Dugdale
4. Intégrale J

1- Introduction à la Mécanique Non Linéaire de Rupture (MNLR)

La mécanique linéaire de la rupture (**MLR**) demeure une approche valable tant que le comportement du matériau est élastique et linéaire, mais aussi lorsque la plastification à fond de fissure reste confinée dans une zone de faible taille par rapport aux dimensions des fissures et de celles de la structure fissurée. Il est quasiment impossible dans beaucoup de matériaux de respecter les deux conditions précédentes et de décrire le comportement avec la **MLR**. Une approche alternative s'avère nécessaire pour ces matériaux.

La mécanique élasto-plastique de la rupture (**MEPR**) ou mécanique non linéaire de la rupture (**MNLR**) s'applique aux matériaux ductiles lorsque le comportement reste toutefois indépendant du temps (pas d'effets dynamiques ou de viscosité, absence de fluage...).

1- Introduction à la Mécanique Non Linéaire de Rupture (MNLRL)

Comme pour la **MLR**, où deux paramètres équivalents (**K** et **G**) peuvent être utilisés comme critère de rupture, deux paramètres caractéristiques de la **MEPR** sont présentés dans ce chapitre. Nous verrons que ces deux paramètres - le déplacement à fond de fissure ou **CTOD** (Crack Tip Opening Displacement) et l'intégrale de contour notée **J** - sont aussi équivalents entre eux. Ils décrivent tous les deux, les conditions à l'extrémité d'une fissure (champs de contraintes et de déplacements) et peuvent être utilisés comme critère de rupture. Les valeurs critiques de **J** et du **CTOD** conduisent à des valeurs de la ténacité des matériaux à peu près indépendantes de la géométrie des structures, même lorsque la plastification à l'extrémité des fissures est importante. On verra également dans quelles conditions on atteint les limites de ces approches à paramètre descriptif unique (**J** ou **CTOD**).

2- Ecartement à fond de fissure (CTOD)

On s'est rendu compte dès le début des années 60, qu'il était difficile de caractériser avec la seule **MLR**, la ténacité de certains matériaux tels que les aciers de structure. Les matériaux étaient élaborés en recherchant une plus forte ténacité mais les concepts existants de la **MLR** (**K** ou **G**) n'étaient plus applicables à cette classe de matériaux comme l'ont montré les essais expérimentaux de Wells. L'émoussement de l'extrémité des fissures fut la principale observation expérimentale de Wells. La figure VI.1 illustre la différence de comportement entre une fissure élastique et une fissure dont l'extrémité s'émousse du fait de l'écoulement plastique.

2- Ecartement à fond de fissure (CTOD)

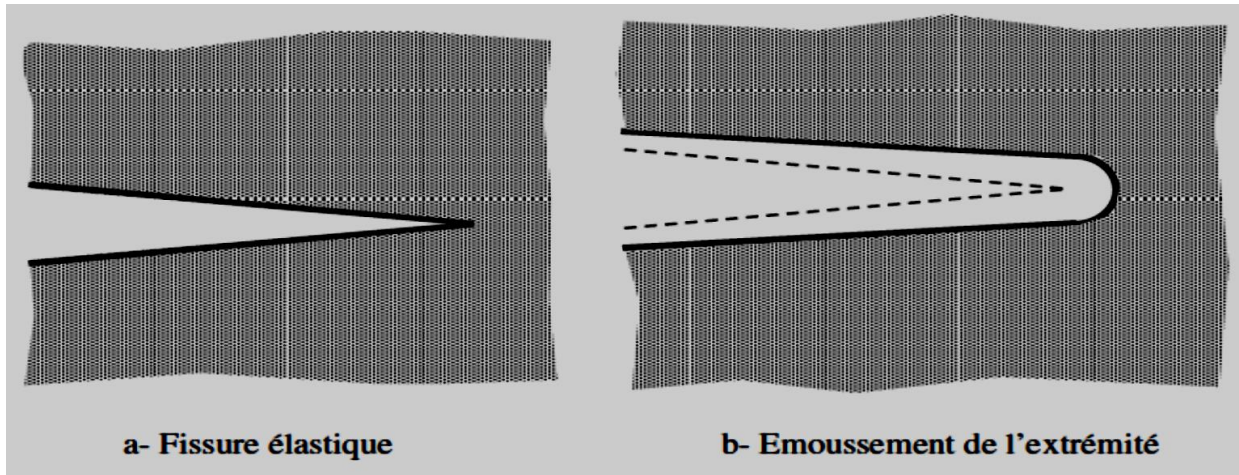


Figure.1 Comparaison a- de l'ouverture d'une fissure élastique et b- d'une fissure dont l'extrémité s'émousse.

Wells observa que l'émoussement de l'extrémité des fissures augmentait avec la ténacité des matériaux. Cela l'a conduit à proposer l'écartement à fond de fissure comme mesure de la ténacité. Ce paramètre est connu aujourd'hui sous le nom de CTOD.

L'analyse proposée par Wells tente de relier le CTOD au **FIC** K lorsqu'on est en régime de plasticité confinée. Pour examiner cette approche, on va considérer une fissure avec une faible zone plastifiée comme indiqué sur la figure 2. Irwin montra qu'une telle fissure se comporte comme si elle était effectivement plus longue du fait de l'écoulement plastique à fond de fissure. On peut alors estimer le CTOD en augmentant la longueur de fissure de r_y , la correction de zone plastifiée. Le CTOD est pris égal à l'ouverture de la fissure à la distance r_y en amont de l'extrémité ; le déplacement à cette distance est estimé à partir de la MLR qui prévoit en mode I :

$$u_y = \frac{\kappa+1}{2\mu} K_I \sqrt{\frac{r_y}{2\pi}} \text{ avec } \begin{cases} \kappa = 3-4\nu & \text{en DP} \\ \kappa = (3-\nu)/(1+\nu) & \text{en CP} \end{cases}$$

La longueur effective de fissure est $a + r_y$, avec r_y le rayon de zone plastifiée calculé d'après l'approche d'Irwin pour un état de contraintes planes :

$$r_y = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_E} \right)^2$$

On prend $k = \frac{3-\nu}{1+\nu}$ pour des contraintes planes, et nous rappelons que $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$, nous obtenons :

$$\delta = 2u_y = \frac{4}{\pi} \frac{K_I^2}{\sigma_E E}$$

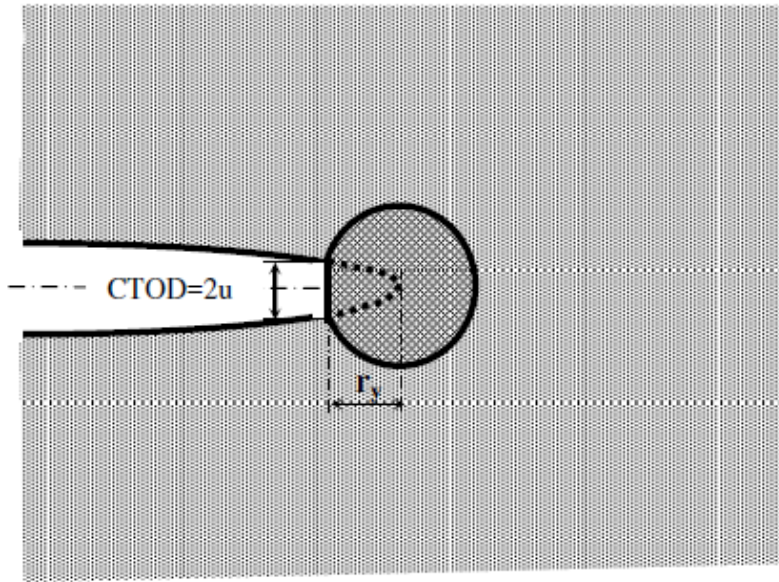


Figure.2 Estimation du **CTOD** à partir du déplacement à la distance r_y en amont de l'extrémité d'une fissure de longueur $a + r_y$.

δ est le **CTOD** ou écartement à fond de fissure. Le **CTOD** peut être relié au taux de restitution d'énergie G en utilisant la relation liant G au **FIC** K . En contraintes planes, on a :

$$G = \frac{K_I^2}{E} \Rightarrow \delta = \frac{4}{\pi} \frac{G}{\sigma_E}$$

Ainsi, lorsqu'on est en régime de plasticité confinée où la MLR s'applique, le CTOD est relié à G et au FIC K_I . Wells[23] postula alors que le CTOD est un paramètre approprié pour caractériser le comportement à l'extrémité d'une fissure lorsqu'on atteint les limites d'application de la MLR. Cette hypothèse s'est avérée correcte quelques années plus tard lorsque fut établit une relation unique entre le CTOD et l'intégrale de contour J introduite par Rice [24].

Le modèle de Dugdale-Barenblatt peut aussi être utilisé pour estimer le CTOD (figure.3).

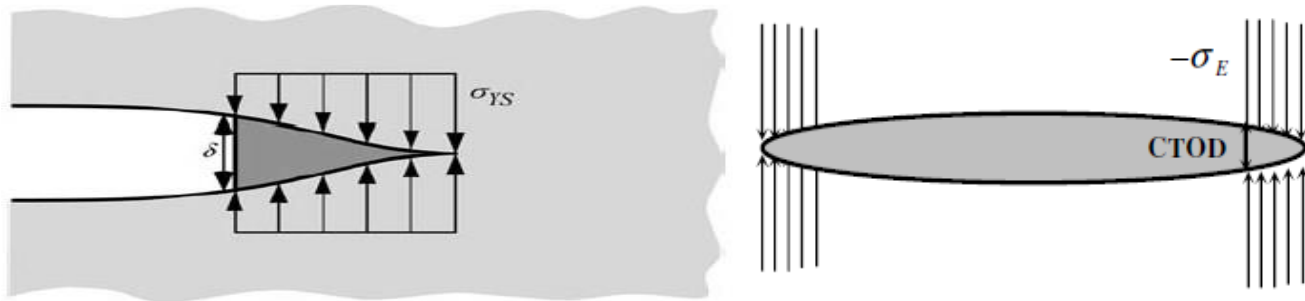


Figure .3 Estimation du CTOD à partir du modèle de Dugdale Barenblatt

L'ouverture de la fissure au début de la zone où les contraintes de compression σ_E s'exercent, correspond au CTOD δ dans ce modèle qui s'exprime par :

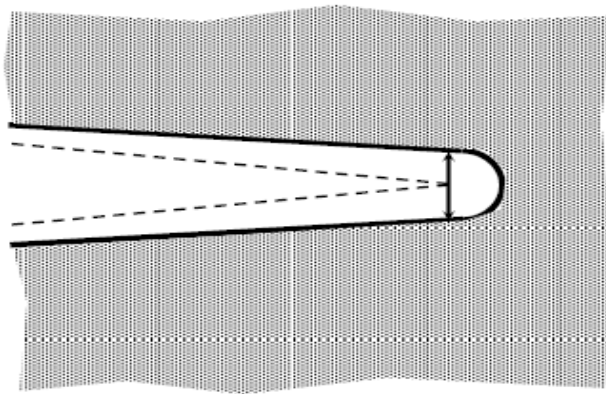
$$\delta = \frac{K_I^2}{\sigma_E E}$$

Le modèle de Dugdale-Barenblatt suppose un état de contraintes planes et un matériau élastique-plastique parfait c'est à dire sans consolidation. La relation plus générale entre le **CTOD** δ et le **FIC KI** est de la forme :

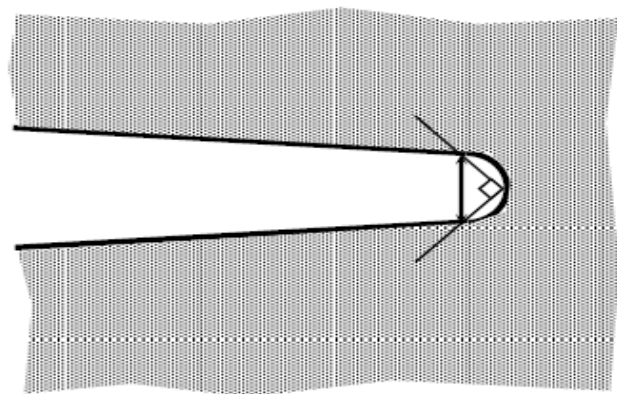
$$\delta = \frac{K_I^2}{m\sigma_E E} = \frac{G}{m\sigma_E}$$

Où m est un coefficient sans dimension qui vaut à peu près 1 en contraintes planes et 2 en déformations planes.

Plusieurs définitions ont été proposées pour le **CTOD**. Les deux définitions les plus communément utilisées sont représentées sur la figure.4. La première utilise le déplacement à l'extrémité de la fissure initiale c'est à dire de longueur non corrigée (figure.4a). La seconde définition, illustrée sur la figure.4b, considère le déplacement à l'intersection des deux cotés d'un angle droit issu du fond de la fissure émoussée.



a) Déplacement à l'extrémité initiale



b) Déplacement à l'intersection d'angle droit

Figure .4 Définitions du CTOD

Expérimentalement, l'écartement à fond de fissure CTOD est une grandeur locale difficilement accessible directement. Il est d'usage d'utiliser des éprouvettes de flexion trois points.

Lorsqu'elles sont fissurées et chargées, ces éprouvettes tournent autour d'un point (le centre de rotation) qui demeure à peu près fixe tout au long du chargement.

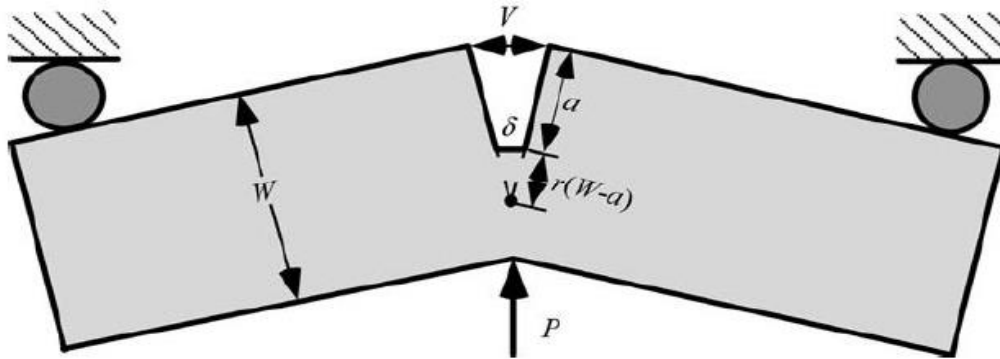


Figure 5 Le modèle à centre de rotation pour estimer le CTOD sur une éprouvette de flexion trois points

La géométrie des triangles semblables permet d'écrire :

$$\frac{\delta}{r(W-a)} = \frac{V}{r(W-a)+a} \Rightarrow \delta = \frac{r(W-a)V}{r(W-a)+a}$$

Où V est l'ouverture de la fissure et r le facteur de rotation compris entre 0 et 1

Le modèle à centre de rotation fixe a été ensuite amélioré pour tenir compte du déplacement élastique qui précède l'émoussement de l'extrémité de la fissure. Les méthodes standards de détermination du CTOD séparent les déplacements élastique et plastique. La montre un exemple type d'enregistrement de la charge en fonction de l'ouverture V de la fissure.

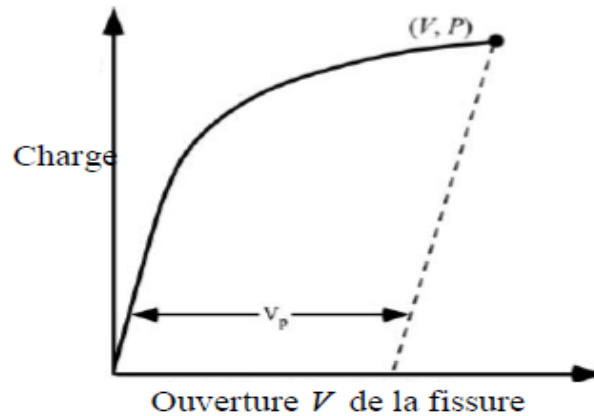


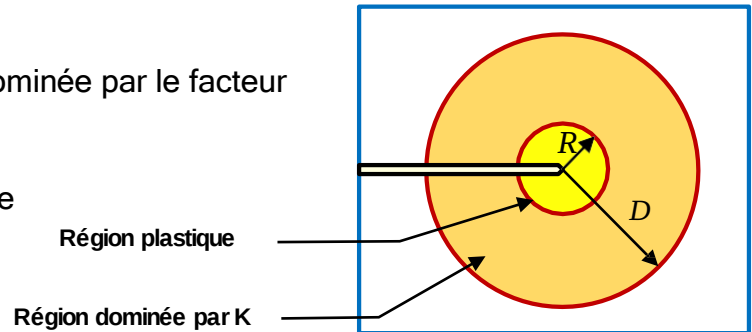
Figure 6 Tracé expérimental de la charge en fonction de l'ouverture de la fissure

Le CTOD est ainsi séparé en deux composantes :

$$\delta = \delta_e + \delta_p = \frac{K_I^2}{m \sigma_Y E} + \frac{r_p (W - a) V_p}{r_p (W - a) + a}$$

Le facteur de rotation plastique r_p est pris égale à 0.44 dans la plus part des procédures standards.

- L'analyse **linéaire élastique** en mécanique de la **rupture** s'applique seulement pour le cas de **matériaux fragiles**.
- Dans la plupart des cas, il existe des **déformations plastiques** au voisinage du **fond de fissure**.
- Supposons la **solution singulière** dominante à l'intérieur du cercle de **rayon D** autour du fond de la fissure.
- Supposons aussi que la **région de confinement plastique** est représentée par le cercle de **rayon R**.
- Si $R \ll D$, la **solution singulière** est dominée par le facteur d'intensité de contrainte **K**.
- Si **R est important**, il faut tenir compte de la **plastification locale**.

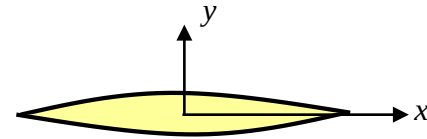


2. Evaluation de la zone plastique

1. Evaluation de la zone plastique par la méthode approchée

- L'idée générale consiste à déterminer le lieu géométrique des points où le champ des contraintes vérifie la limite élastique. La méthode est approximative et permet d'évaluer la taille de la zone plastique.
- Considérons une fissure en mode ouverture, les contraintes au voisinage du bout de fissure s'écrivent:

$$\sigma_1 = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \right)$$
$$\sigma_2 = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \right)$$



- En considérant que la contrainte σ_2 , vérifie le critère de Von Mises:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_Y^2 \quad (\sigma_Y : \text{la limite élastique})$$



$$r_p(\theta) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_Y} \right)^2 \left(\frac{3}{2} \sin^2 \theta + 1 + \cos \theta \right)$$

(En contraintes planes)

Chapitre III Mécanique non linéaire de la rupture



$$r_p(\theta) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{K_1}{\sigma_Y} \right)^2 \left(\frac{3}{2} \sin^2 \theta + (1-2\nu)^2 (1 + \cos \theta) \right)$$

(En déformations planes)

➤ Pour $\theta=0$, la zone plastique est alors:

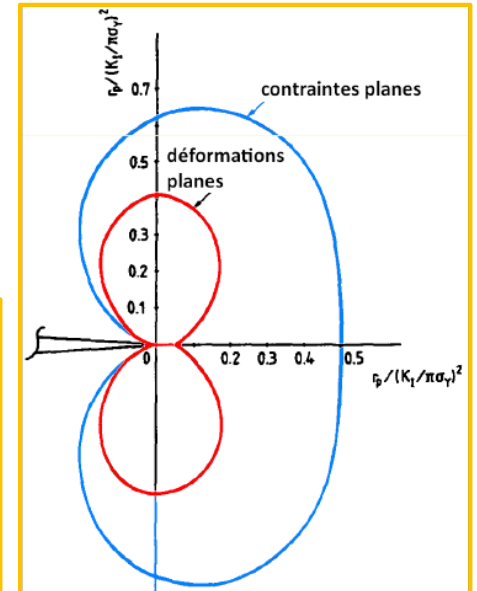
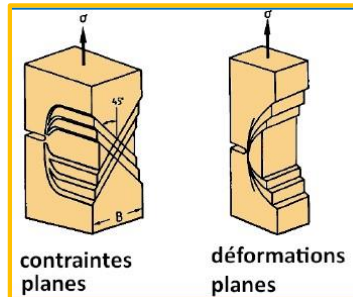
$$r_p(0) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_1}{\sigma_Y} \right)^2$$

(En contraintes planes)

$$r_p(0) = \frac{1}{18\pi} \left(\frac{K_1}{\sigma_Y} \right)^2$$

(En déformations planes avec $\nu = 1/3$)

Chemin de propagation de la plasticité dans l'épaisseur



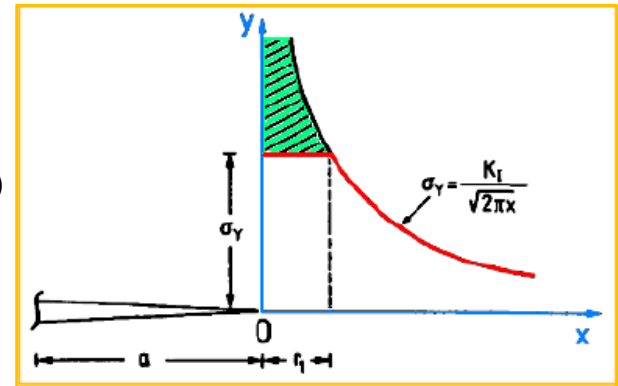
2. Modèle d'Irwin

- Irwin proposa en 1960 un modèle permettant d'évaluer la **taille de la zone plastique** sur l'axe de la fissure.
- Hypothèse d'un matériau **élastique-plastique parfait**.
- Hypothèse des **contraintes planes**
- Evolution de σ_Y le long de l'axe de la fissure.
- Le rayon de la zone plastique est donné par:

$$r_p(0) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_Y} \right)^2 \quad (\sigma_Y : \text{la limite élastique})$$

$$0 < r < r_1 \Rightarrow \sigma_y = \sigma_Y$$

$$r > r_1 \Rightarrow \sigma_Y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}$$



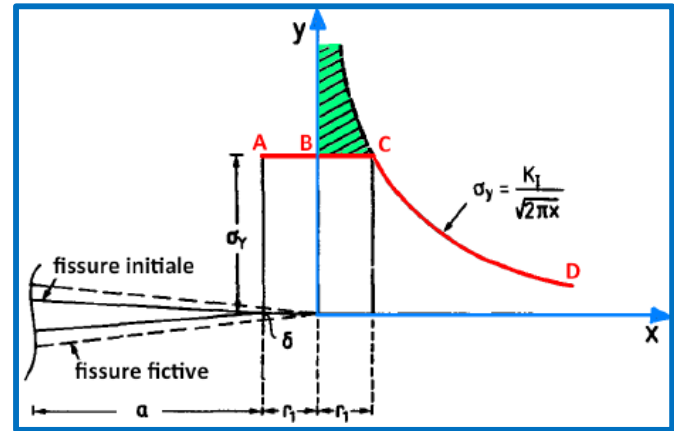
- Comme σ_y est constante pour $r < r_1 \rightarrow$ violation de l'équilibre suivant l'axe y .
- La réduction de σ_y est compensée par σ_x d'où une augmentation de r_1 .

Chapitre III Mécanique non linéaire de la rupture

- Irwin proposa que l'aire en dessous de la courbe $\sigma_y(x)$ soit donnée par:

$$\int_0^{r_1} \frac{K_I dx}{\sqrt{2\pi x}} = 2\sigma_Y r_1$$

- Pour satisfaire l'équilibre
→ la fissure doit s'allonger de r_1
- L'aire en dessous de la courbe ABCD = l'aire sous la courbe $\sigma_y(x) = K_I / \sqrt{2\pi x}$



- La résolution de $\int_0^{r_1} \frac{K_I dx}{\sqrt{2\pi x}} = 2\sigma_Y r_1$ donne la longueur de fissure:

$$c = \frac{1}{\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_Y} \right)^2$$

- Le modèle d'Irwin donne une longueur de correction deux fois plus importante que la méthode approchée.

Contraintes planes

→

Méthode approchée

$$r_p(0) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_Y} \right)^2$$

Irwin

$$c = \frac{1}{\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_Y} \right)^2$$

Déformations planes

→

$$r_p(0) = \frac{1}{18\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_Y} \right)^2$$

$$c = \frac{1}{3\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_Y} \right)^2$$

Chapitre III Mécanique non linéaire de la rupture

- De l'ouverture de la fissure, nous pouvons obtenir le champs du déplacement vertical:

$$v(x) = \frac{\kappa+1}{4\mu} \sigma \sqrt{a^2 - x^2}, \quad -a \leq x \leq a$$

➤ Ce qui donne $\delta = 2v = \frac{\kappa+1}{4\mu} \sigma \sqrt{(a + c/2)^2 - a^2}$



Contraintes planes



$$\delta = \frac{4}{\pi E} \frac{K_I^2}{\sigma_f}$$

Déformations planes



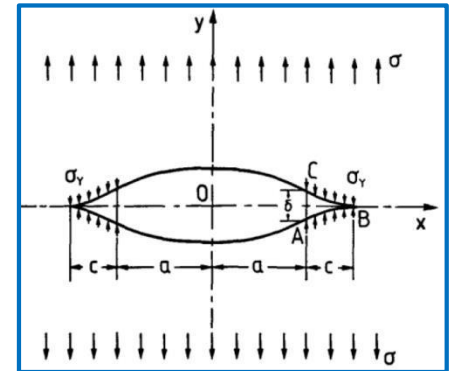
$$\delta = \frac{4(1-\nu^2)}{3\pi E} \frac{K_I^2}{\sigma_Y}$$

3. Modèle de Dugdale

- Ce modèle est valable pour les **plaques très minces**, faites d'un **matériau élastique- plastique parfait**.
- Le critère de **Tresca** est utilisé. La plasticité est supposée concentrée le long de l'axe de la fissure.

$$c = \frac{\pi}{8} \left(\frac{K_I}{\sigma_Y} \right)^2$$

$$\delta = \frac{K_I^2}{E \sigma_Y}$$



3. Critères de rupture basé sur l'ouverture de fissure (COD)

- Introduit par Wells et Cottrell (1961) → initiation de fissures en présence de plasticité

$$\delta = \delta_c$$

- Le modèle d'Irwin donne (en contraintes planes):

$$\delta_c = \frac{4}{\pi} \frac{K_c^2}{E \sigma_Y}$$

- Le modèle de Dugdale donne (en contraintes planes):

$$\delta_c = \frac{K_c^2}{E \sigma_Y}$$

- D'après le Chapitre 1, nous avons:

$$G_I = \frac{K_I^2}{E}$$

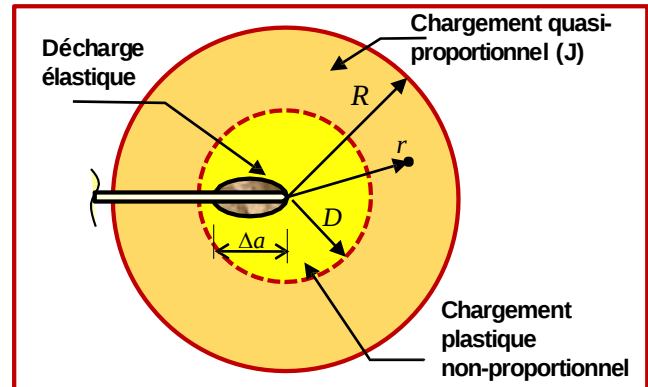
- D'où l'on peut déduire:

$$G = \frac{\pi}{4} \sigma_Y \delta$$

→ D'après le modèle d'Irwin

$$G = \sigma_Y \delta$$

→ D'après le modèle de Dugdale



Le taux de restitution d'énergie de Griffith est proportionnel à l'ouverture de la fissure

4- Intégrale J

Le paramètre J est défini à partir de l'intégrale de contour suivante:

$$J = \int_{\Gamma} \left(w dy - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} ds \right)$$

où Γ est un contour d'intégration entourant l'extrémité de la fissure (figure.7), ds l'élément de longueur sur Γ , T_i et u_i les composantes du vecteur contrainte et du vecteur déplacement en un point de Γ . La densité d'énergie de déformation w est définie quant à elle par :

$$w = \int_0^{\epsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}$$

où σ_{ij} et ϵ_{ij} sont les composantes des tenseurs de contraintes et de déformations au point courant sur le contour Γ .

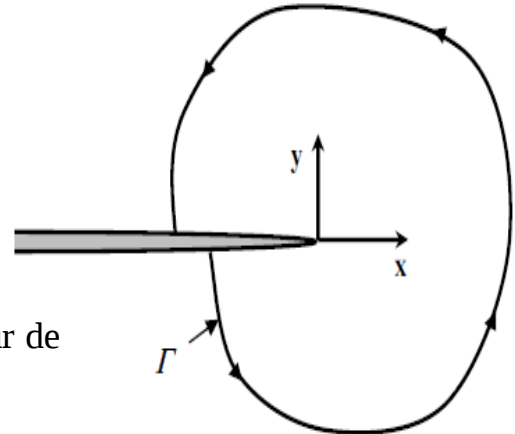


Figure .7 Contour arbitraire autour de l'extrémité d'une fissure

Fin du chapitre III