

## Chapitre I- Le champ magnétique

### I.1- Introduction

#### I.1.1 Bref aperçu historique

Les aimants sont connus depuis l'Antiquité, sous le nom de magnétite, pierre trouvée à proximité de la ville de Magnesia (Turquie). C'est de cette pierre que provient le nom actuel de champ magnétique.

Les chinois furent les premiers à utiliser les propriétés des aimants, il y a plus de 1000 ans, pour faire des boussoles. Elles étaient constituées d'une aiguille de magnétite posée sur de la paille flottant sur de l'eau contenue dans un récipient gradué.

Au XVIII<sup>ème</sup> siècle, Franklin découvre la nature électrique de la foudre (1752). Or, il y avait déjà à cette époque de nombreux témoignages de marins attirant l'attention sur des faits étranges :

- Les orages perturbent les boussoles
- La foudre frappant un navire aimante tous les objets métalliques.

Franklin en déduisit « *la possibilité d'une communauté de nature entre les phénomènes électriques et magnétiques* ».

Coulomb (1785) montre la décroissance en  $1/r^2$  des deux forces.

Mais il faut attendre la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle pour qu'une théorie complète apparaisse, la théorie de l'électromagnétisme.

Tout commença avec l'expérience de Oersted en 1820. Il plaça un fil conducteur au dessus d'une boussole et y fit passer un courant. En présence d'un courant l'aiguille de la boussole est effectivement déviée, prouvant sans ambiguïté un lien entre le courant électrique et le champ magnétique. Par ailleurs, il observa :

- Si on inverse le sens du courant, la déviation change de sens.
- La force qui dévie l'aiguille est non radiale.

L'étude quantitative des interactions entre aimants et courants fut faite par les physiciens Biot et Savart (1820). Ils mesurèrent la durée des oscillations d'une aiguille aimantée en fonction de sa distance à un courant rectiligne. Ils trouvèrent que la force agissant sur un pôle est dirigée perpendiculairement à la direction reliant ce pôle au conducteur et qu'elle varie en raison inverse de la distance. De ces expériences, Laplace déduisit ce qu'on appelle aujourd'hui la loi de Biot et Savart. Une question qui s'est ensuite immédiatement posée fut : si un courant dévie un aimant, alors est-ce qu'un aimant peut faire dévier un courant ?

Ceci fut effectivement prouvé par Davy en 1821 dans une expérience où il montra qu'un arc électrique était dévié dans l'entrefer d'un gros aimant.

L'élaboration de la théorie électromagnétique mit en jeu un grand nombre de physiciens de renom : Oersted, Ampère, Arago, Faraday, Foucault, Henry, Lenz, Maxwell, Weber, Helmholtz, Hertz, Lorentz et bien d'autres. Si elle débuta en 1820 avec Oersted, elle ne fut

mise en équations par Maxwell qu'en 1873 et ne trouva d'explication satisfaisante qu'en 1905, dans le cadre de la théorie de la relativité d'Einstein.

Dans ce cours de magnétostatique, nous traiterons dans les chapitres I à III de la question suivante : comment produire un champ magnétique à partir de courants permanents ? Nous n'aborderons que partiellement (chapitre IV) le problème inverse : comment produire de l'électricité à partir d'un champ magnétique ?

### I.2.1- Nature des effets magnétiques

Jusqu'à présent nous n'avons abordé que des particules chargées **immobiles**, ou encore des conducteurs (ensembles de particules) en équilibre. Que se passe-t-il lorsqu'on considère enfin le mouvement des particules ?

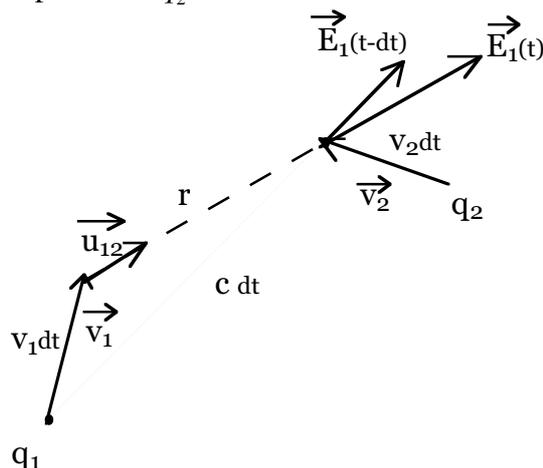
Soient deux particules  $q_1$  et  $q_2$  situées à un instant  $t$  aux points  $M_1$  et  $M_2$ . En l'absence de mouvement, la particule  $q_1$  crée au point  $M_2$  un champ électrostatique  $\vec{E}_1(M_2)$  et la particule  $q_2$  subit une force dont l'expression est donnée par la loi de Coulomb

$$\vec{F}_{1/2} = q_2 \vec{E}_1(M_2)$$

Qui dit force, dit modification de la quantité de mouvement de  $q_2$  puisque  $\vec{F}_{1/2} = \frac{d\vec{p}_2}{dt} \approx \frac{\Delta\vec{p}_2}{\Delta t}$ .

Autrement dit, la force électrostatique due à  $q_1$  crée une modification  $\Delta\vec{p}_2$  pendant un temps  $\Delta t$ . Une force correspond en fait à un transfert d'information (ici de  $q_1$  vers  $q_2$ ) pendant un court laps de temps. Or, rien ne peut se propager plus vite que la vitesse  $c$  de la lumière. Cette vitesse étant grande mais **finie**, tout transfert d'information d'un point de l'espace à un autre prend nécessairement un temps fini. Ce temps pris par la propagation de l'information introduit donc un retard, comme nous allons le voir.

On peut considérer l'exemple ci-dessus comme se qui se passe effectivement dans le référentiel propre de  $q_1$ . Dans un référentiel fixe,  $q_1$  est animée d'une vitesse  $\vec{v}_1$ . Quelle serait alors l'action de  $q_1$  sur une particule  $q_2$  animée d'une vitesse  $\vec{v}_2$  ?



Soit  $dt$  le temps qu'il faut à l'information (le champ électrostatique créé par  $q_1$ ) pour se propager de  $q_1$  vers  $q_2$ . Pendant ce temps,  $q_1$  parcourt une distance  $v_1 dt$  et  $q_2$  parcourt la distance  $v_2 dt$ . Autrement dit, lorsque  $q_2$  ressent les effets électrostatiques dus à  $q_1$ , ceux-ci ne sont plus radiaux : le champ  $\vec{E}_1(t-dt)$  « vu » par  $q_2$  est dirigé vers l'ancienne position de  $q_1$  et dépend de la distance  $c dt$  et non pas de la distance  $r$ . On voit ici qu'il faut corriger la loi de

Coulomb qui nous aurait donné le champ  $\vec{E}_1(t)$ , qui est faux (suppose propagation instantanée de l'information ie. une vitesse infinie).

*Les effets électriques ne peuvent se résumer au champ électrostatique.*

Cependant, l'expérience montre que la prise en compte de cette correction ne suffit pas à expliquer la trajectoire de  $q_2$  : une force supplémentaire apparaît, d'ailleurs plus importante que cette correction ! La force totale exercée par  $q_1$  sur  $q_2$  s'écrit en fait

$$\vec{F}_{1/2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left[ \vec{u}_{12} + \frac{\vec{v}_2}{c} \wedge \left( \frac{\vec{v}_1}{c} \wedge \vec{u}_{12} \right) \right]$$

Dans cette expression (que l'on admettra) on voit donc apparaître un deuxième terme qui dépend des vitesses des deux particules ainsi que la vitesse de propagation de la lumière. Ce deuxième terme s'interprète comme la contribution d'un champ magnétique créé par  $q_1$ . Autrement dit,

$$\vec{F}_{1/2} = q_2 \left( \vec{E}_1 + \vec{v}_2 \wedge \vec{B}_1 \right)$$

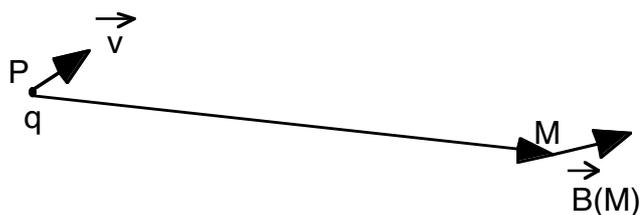
*la force magnétique est une correction en  $(v/c)^2$  à la force de Coulomb.* Nous reviendrons plus tard (chapitre III) sur l'expression et les propriétés de la force magnétique. Cette expression n'est valable que pour des particules se déplaçant à des vitesses beaucoup plus petites que celle de la lumière (approximation de la magnétostatique).

Dernière remarque : cette expression dépend de la vitesse de la particule, ce qui implique que le champ magnétique dépend du référentiel (voir discussion chapitre III) !

## 1.2- Expressions du champ magnétique

### 1.2.1- Champ magnétique créé par une charge en mouvement

D'après ci-dessus, le champ magnétique créé en un point M par une particule de charge q située en un point P et animée d'une vitesse  $\vec{v}$  dans un référentiel galiléen est



$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \vec{v} \wedge \vec{PM}}{\|\vec{PM}\|^3}$$

L'unité du champ magnétique dans le système international est le **Tesla (T)**. Une autre unité appartenant au système CGS, le **Gauss (G)**, est également très souvent utilisée :

$$1 \text{ Gauss} = 10^{-4} \text{ Tesla.}$$

Le facteur  $\mu_0$  est la **perméabilité du vide** : il décrit la capacité du vide à « laisser passer » le champ magnétique. Sa valeur dans le système d'unités international MKSA est

$$\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ H.m}^{-1} \text{ (H pour Henry)}$$

**Remarques :**

- Cette valeur est exacte, directement liée à la définition de l'Ampère (voir Chapitre III). Le facteur  $4\pi$  a été introduit pour simplifier les équations de Maxwell (cf Licence).
- Nous avons vus que les phénomènes électriques et magnétiques sont intimement liés. Les expériences de l'époque montrèrent que la vitesse de propagation était toujours la même, à savoir  $c$ , la vitesse de la lumière. Cela signifiait qu'il y avait donc un lien secret entre le magnétisme, l'électricité et la lumière, et plongeait les physiciens dans la plus grande perplexité. On pose donc

$$\boxed{\mu_0 \varepsilon_0 c^2 = 1}$$

ce qui permet de définir la valeur de la permittivité du vide (caractéristique décrivant sa capacité à affaiblir les forces électrostatiques)

$$\varepsilon_0 \approx \frac{10^{-9}}{36\pi} \text{ F.m}^{-1} \text{ (F pour Farad)}$$

la valeur approchée provenant de notre connaissance approchée de la valeur de la vitesse de la lumière.

**Deux propriétés importantes du champ magnétique :**

- De même que pour le champ électrostatique, le **principe de superposition** s'applique au champ magnétique. Si on considère deux particules 1 et 2 alors le champ magnétique créé en un point M quelconque de l'espace sera la somme vectorielle des champs créés par chaque particule.
- Du fait du produit vectoriel, le champ magnétique est ce qu'on appelle un **pseudo-vecteur** (voir plus bas).

**Quelques ordres de grandeur :**

- Un aimant courant  $B \approx 10 \text{ mT}$
- Un électroaimant ordinaire  $B \approx \text{Tesla}$
- Une bobine supraconductrice  $B \approx 20 \text{ Tesla}$
- Une bobine résistive  $B \approx$  de 30 à 1000 Tesla
- Champ magnétique interstellaire moyen :  $B \approx \mu\text{G}$
- Champ magnétique dans une tache solaire  $B \approx \text{kG} \approx 0.1 \text{ Tesla}$
- Champ magnétique terrestre :  $B_{\perp} \approx 0,4 \text{ G}$ ,  $B_{\text{horizontal}} \approx 0.3 \text{ G}$
- Champ magnétique d'une étoile à neutrons  $B \approx 10^8 \text{ Tesla}$

**I.2.2- Champ magnétique créé par un ensemble de charges en mouvement**

Considérons  $N$  particules de charges  $q_i$  situés en des points  $P_i$  et de vitesse  $\vec{v}_i$ . En vertu du principe de superposition, le champ magnétique créé en un point M est la somme vectorielle des champs créés par chaque particule et vaut

$$\boxed{\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^N q_i \vec{v}_i \wedge \frac{\vec{P}_i M}{\|\vec{P}_i M\|^3}}$$

Si le nombre de particules est très grand dans un volume  $V$  donné et qu'on s'intéresse à des échelles spatiales bien plus grandes que la distance entre ces particules, il est avantageux

d'utiliser une description continue. Il faut donc définir des distributions continues comme nous l'avons fait en électrostatique. Mais des distributions continues de quoi ?

Le passage à la limite continue consiste à assimiler tout volume élémentaire  $d^3V$ , situé autour d'un point  $P'$  quelconque de la distribution de charges en mouvement, à une charge  $dq$  animée d'une vitesse moyenne  $\vec{v}$ . Le champ magnétique résultant s'écrit alors

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{dq \vec{v}(P') \wedge \overrightarrow{P'M}}{\|\overrightarrow{P'M}\|^3}$$

où l'intégrale porte sur le volume  $V$  total embrassé par ces charges.

En toute généralité, considérons  $\alpha$  espèces différentes de particules (ex : électrons, ions), chacune animée d'une vitesse  $\vec{v}_\alpha$ , de charge  $q_\alpha$  et d'une densité numérique  $n_\alpha$ . On peut alors écrire  $dq \vec{v} = \sum_\alpha n_\alpha q_\alpha \vec{v}_\alpha d^3V$ , où la somme porte sur le nombre d'espèces différentes et non sur le nombre de particules. On reconnaît ainsi l'expression générale du vecteur densité locale de courant  $\vec{j} = \sum_\alpha n_\alpha q_\alpha \vec{v}_\alpha$ .

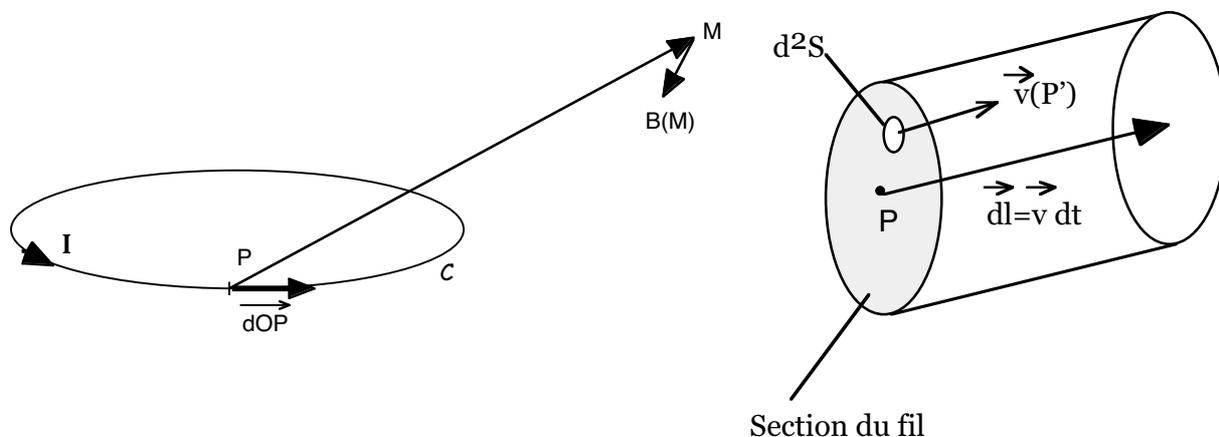
L'expression du champ magnétique créé par une distribution volumique de charges quelconque est donc

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{j}(P') \wedge \overrightarrow{P'M}}{\|\overrightarrow{P'M}\|^3} d^3V$$

Ce résultat est général et valable quelle que soit la forme du conducteur. On peut l'appliquer, par exemple, à l'intérieur d'un métal de volume  $V$  quelconque.

### 1.2.3- Champ créé par un circuit électrique (formule de Biot et Savart)

Dans le cas particulier d'un circuit filiforme fermé, parcouru par un courant permanent  $I$ , la formule précédente va nous fournir la loi de Biot et Savart.



Dans ce cas, le volume élémentaire s'écrit  $d^3V = d^2S dl$  où  $d^2S$  est un élément de surface transverse situé en  $P'$  et  $dl$  un élément de longueur du fil.

Or, on considère toujours des cas où le point M est situé à une distance telle du fil qu'on peut considérer celui-ci comme très mince.

Plus précisément, le vecteur vitesse (ou densité de courant) a la même orientation sur toute la section du fil ( $\vec{j}$  parallèle à  $\vec{dl}$  et à  $\vec{d^2S}$ ). Ainsi, on écrit

$$\begin{aligned}\vec{B}(M) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\text{circuit}} dl \iint_{\text{section}} \frac{\vec{j}(P') \wedge \overrightarrow{P'M}}{\|\overrightarrow{P'M}\|^3} d^2S = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\text{circuit}} \frac{\left[ \iint_{\text{section}} \vec{j}(P') d^2S \right] dl \wedge \overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\text{circuit}} \frac{\left[ \iint_{\text{section}} \vec{j}(P') \cdot \vec{d^2S} \right] \vec{dl} \wedge \overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\text{circuit}} \frac{I \vec{dl} \wedge \overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\text{circuit}} \frac{\overrightarrow{dOP} \wedge \overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3}\end{aligned}$$

où l'on a utilisé  $P'M \gg PP'$  (donc  $P'M \approx PM$ ), P étant un point sur le fil (centre de la section). Par ailleurs, nous avons utilisé le fait que la normale à la section ainsi que  $dl$  étaient orientés dans le sens du courant ( $\vec{j} d^2S dl = (\vec{j} \cdot \vec{d^2S}) \vec{dl}$ ).

**Formule de Biot et Savart** : en un point M quelconque de l'espace, le champ magnétique créé par un circuit parcouru par un courant permanent I est

$$\boxed{\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\text{circuit}} \frac{\overrightarrow{dP} \wedge \overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3}}$$

où P est un point quelconque le long du circuit et  $\overrightarrow{dP} = \overrightarrow{dOP}$ .

La formule de Biot et Savart (1820) a été établie expérimentalement et fournit un lien explicite entre le champ magnétique et le courant. Mais ce n'est que plus tard (1880+) que les physiciens ont réalisé que le courant était dû au déplacement de particules dans un conducteur.

### Règles mnémotechniques :

Dans l'utilisation de la formule de Biot et Savart, il faut faire attention au fait que le champ magnétique créé par un circuit fermé est la *somme vectorielle* de tous les  $\vec{dB}$ , engendrés par un élément de circuit, dont le sens est donné par celui du courant I,

$$\vec{dB} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\overrightarrow{dP} \wedge \overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3}$$

Or, chaque  $\vec{dB}$  est défini par un produit vectoriel. Il faut donc faire extrêmement attention à l'orientation des circuits. Voici quelques règles mnémotechniques :

- Règle des trois doigts de la main droite
- Règle du bonhomme d'Ampère
- Règle du tire-bouchon
- Règle des pôles magnétiques

## I.2.4- Propriétés de symétrie du champ magnétique

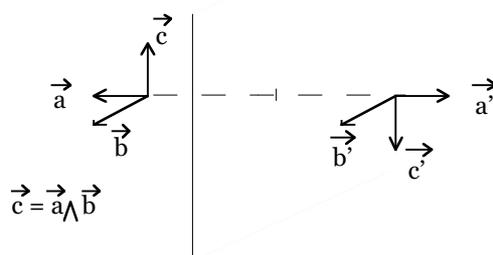
Ces propriétés sont fondamentales car elles permettent de simplifier considérablement le calcul du champ magnétique. Du fait que le champ soit un effet créé par un courant, il contient des informations sur les causes qui lui ont donné origine. Cette trivialité se traduit par la présence de certaines symétries et invariances si les sources de courant en possèdent également. Ainsi, si l'on connaît les propriétés de symétrie de la densité de courant, on pourra connaître celles du champ magnétique.

### Vecteurs et pseudo-vecteurs

Un vecteur polaire, ou vrai vecteur, est un vecteur dont la direction, le module et le sens sont parfaitement déterminés. Exemples : vitesse d'une particule, champ électrostatique, densité de courant.

Un vecteur axial, ou pseudo-vecteur, est un vecteur dont le sens est défini à partir d'une *convention d'orientation d'espace* et dépend donc de cette convention. Exemples : le vecteur rotation instantanée, le champ magnétique, la normale à une surface.

Cette différence provient du produit vectoriel : le sens du produit vectoriel dépend de la convention d'orientation de l'espace. Le produit vectoriel de deux vrais vecteurs (respectivement pseudo-vecteurs) est un pseudo-vecteur (resp. vrai vecteur), tandis que celui d'un vrai vecteur par un pseudo-vecteur est un pseudo-vecteur.



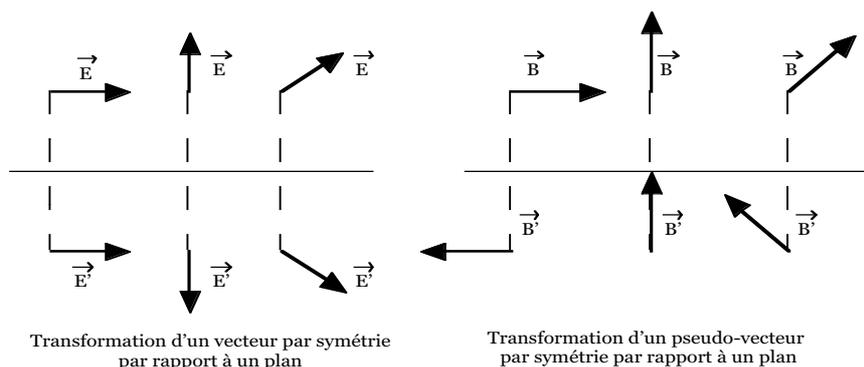
Transformation par rapport à un plan de symétrie

Orienter l'espace revient à associer à un axe orienté un sens de rotation dans un plan perpendiculaire à cet axe. Le sens conventionnellement choisi est déterminé par la règle du tire-bouchon de Maxwell ou la règle du bonhomme d'Ampère (pour le champ magnétique mais aussi pour le vecteur rotation instantanée).

### Transformations géométriques d'un vecteur ou d'un pseudo-vecteur

Vecteurs et pseudo-vecteurs se transforment de la même manière dans une rotation ou une translation. Il n'en est pas de même dans la symétrie par rapport à un plan ou à un point. Dans ces transformations

- un vecteur est transformé en son symétrique,
- un pseudo-vecteur est transformé en l'opposé du symétrique.



Soit  $\vec{A}'(M')$  le vecteur obtenu par symétrie par rapport à un plan  $S$  à partir de  $\vec{A}(M)$ . D'après la figure ci-dessus, on voit que

1) si  $\vec{A}(M)$  est un vrai vecteur

- $\vec{A}'(M') = \vec{A}(M)$  si  $\vec{A}(M)$  est engendré par les mêmes vecteurs de base que  $S$  ;
- $\vec{A}'(M') = -\vec{A}(M)$  si  $\vec{A}(M)$  est perpendiculaire à  $S$ .

2) au contraire, si  $\vec{A}(M)$  est un pseudo-vecteur

- $\vec{A}'(M') = \vec{A}(M)$  si  $\vec{A}(M)$  est perpendiculaire à  $S$  ;
- $\vec{A}'(M') = -\vec{A}(M)$  si  $\vec{A}(M)$  est engendré par les mêmes vecteurs de base que  $S$ .

Ces deux règles de transformation vont nous permettre de déterminer des règles de symétrie utiles.

### Principe de Curie

« Lorsque certaines causes produisent certains effets, les éléments de symétrie des causes doivent se retrouver dans les effets produits. »

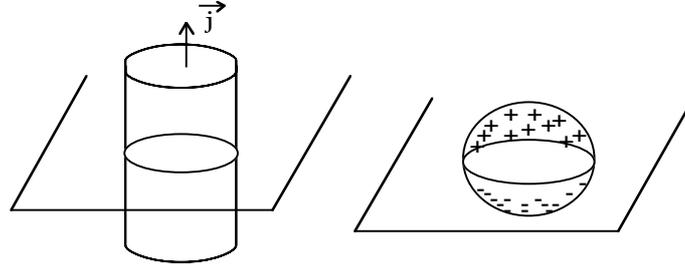
Dans une espace homogène et isotrope, si l'on fait subir une transformation géométrique à un système physique (ex : ensemble de particules, distribution de charges et/ou de courants) susceptible de créer certains effets (forces, champs), alors ces effets subissent les mêmes transformations.

Si un système physique  $S$  possède un certain degré de symétrie, on pourra alors déduire les effets créés par ce système en un point à partir des effets en un autre point.

### Règles de symétrie

- Invariance par translation : si  $S$  est invariant dans toute translation parallèle à un axe  $Oz$ , les effets ne dépendent pas de  $z$ .
- Symétrie axiale : si  $S$  est invariant dans toute rotation  $\theta$  autour d'un axe  $Oz$ , alors ses effets exprimés en coordonnées cylindriques  $(\rho, \theta, z)$  ne dépendent pas de  $\theta$ .
- Symétrie cylindrique : si  $S$  est invariant par translation le long de l'axe  $Oz$  et rotation autour de ce même axe, alors ses effets exprimés en coordonnées cylindriques  $(\rho, \theta, z)$  ne dépendent que de la distance à l'axe  $\rho$ .
- Symétrie sphérique : si  $S$  est invariant dans toute rotation autour d'un point fixe  $O$ , alors ses effets exprimés en coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$  ne dépendent que de la distance au centre  $r$ .
- Plan de symétrie  $\Pi$  : si  $S$  admet un plan de symétrie  $\Pi$ , alors en tout point de ce plan,
  - un effet à caractère vectoriel est contenu dans le plan

- un effet à caractère pseudo-vectériel lui est perpendiculaire.
- Plan d'antisymétrie  $\Pi'$  : si, par symétrie par rapport à un plan  $\Pi'$ , S est transformé en  $-S$ , alors en tout point de ce plan,
  - un effet à caractère vectoriel est perpendiculaire au plan
  - un effet à caractère pseudo-vectériel est contenu dans ce plan.



Exemples de plans d'antisymétrie

Voici quelques règles simples et très utiles, directement issues de la liste ci-dessus :

- Si  $\vec{j}$  est invariant par rotation autour d'un axe,  $\vec{B}$  l'est aussi.
- Si  $\vec{j}$  est poloidal (porté par  $\vec{u}_\rho$  et/ou  $\vec{u}_z$ ), alors  $\vec{B}$  est toroïdal (porté par  $\vec{u}_\theta$ ).
- Si  $\vec{j}$  est toroïdal, alors  $\vec{B}$  est poloidal.
- Si le système de courants possède un plan de symétrie, alors  $\vec{j}$  est contenu dans ce plan et donc  $\vec{B}$  lui est perpendiculaire.

Pourquoi un vecteur  $\vec{A}(x_1, x_2, x_3)$  est indépendant de la variable  $x_1$  si le système S n'en dépend pas ?

Soit un point  $M(x_1, x_2, x_3)$  dont les coordonnées sont exprimées dans un système quelconque.

Soit un point  $M'$  lui étant infiniment proche. On a alors

$$\vec{A}(M') = \begin{cases} A_1(M') = A_1(x_1 + dx_1, x_2, x_3) \approx A_1(x_1, x_2, x_3) + \frac{\partial A_1}{\partial x_1} dx_1 \\ A_2(M') = A_2(x_1 + dx_1, x_2, x_3) \approx A_2(x_1, x_2, x_3) + \frac{\partial A_2}{\partial x_1} dx_1 \\ A_3(M') = A_3(x_1 + dx_1, x_2, x_3) \approx A_3(x_1, x_2, x_3) + \frac{\partial A_3}{\partial x_1} dx_1 \end{cases}$$

c'est à dire, de façon plus compacte  $\vec{A}(M') = \vec{A}(M) + \frac{\partial \vec{A}}{\partial x_1} dx_1$ . Si le système physique S reste

invariant lors d'un changement de M en  $M'$ , alors (Principe de Curie)  $\vec{A}'(M') = \vec{A}(M)$ . On a

donc  $\frac{\partial \vec{A}}{\partial x_1} = \vec{0}$  en tout point M, ce qui signifie que  $\vec{A}(x_2, x_3)$  ne dépend pas de  $x_1$ . On peut

suivre le même raisonnement pour chacune des autres coordonnées.

Pourquoi un vrai vecteur appartient nécessairement à un plan  $\Pi$  de symétrie ?

Quel que soit M de S, soit  $M'$  son symétrique par rapport à  $\Pi$ . Ce plan étant un plan de symétrie, cela signifie que  $f(M) = f(M')$  pour toute fonction de M. Ceci est en particulier vrai pour chaque composante  $A_i(M) = A_i(M')$  du vecteur  $\vec{A}(M)$ . On a donc  $\vec{A}'(M') = \vec{A}(M)$  ce qui implique que  $\vec{A}(M)$  est engendré par les mêmes vecteurs de base que  $\Pi$ .

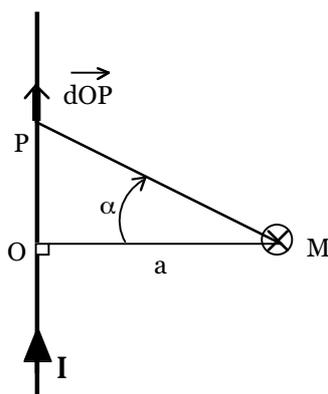
Si  $\vec{A}(M)$  est un pseudo-vecteur, alors on vient de montrer que  $\vec{A}(M)$  est nécessairement perpendiculaire à  $\Pi$ .

Pourquoi un vrai vecteur est nécessairement perpendiculaire à un plan  $\Pi$  d'antisymétrie ?

Ce plan étant un plan d'antisymétrie, on a  $f(M') = -f(M)$  pour toute fonction de  $M$ . Ceci étant vrai pour chaque composante du vecteur  $\vec{A}(M)$ , on a donc  $A_i(M') = -A_i(M)$ , ce qui implique que  $\vec{A}(M)$  est perpendiculaire à  $\Pi$  (ou lui appartient si  $\vec{A}(M)$  est un pseudo-vecteur).

### 1.3- Calcul du champ dans quelques cas simples

#### 1.3.1- Fil rectiligne infini



On considère un fil rectiligne, infini, parcouru par un courant  $I$  permanent. La densité de courant possède une invariance par translation selon l'axe  $z$  ainsi que par rotation autour de cet axe. Elle possède donc une symétrie cylindrique. Les calculs seront donc plus simples dans le système de coordonnées cylindriques. Enfin, la densité de courant étant poloidale, c'est à dire

$$\vec{j}(\rho, \theta, z) = j(\rho) \vec{u}_z,$$

le champ magnétique est toroïdal

$$\vec{B}(\rho, \theta, z) = B(\rho) \vec{u}_\theta$$

Calculons le champ créé en un point  $M$  situé à une distance  $a$  du fil par un élément  $dOP$  vu sous un angle  $\alpha$ . La loi de Biot et Savart donne

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{OP} \wedge \vec{PM}}{\|\vec{PM}\|^3}$$

où  $\vec{PM} = \vec{PO} + \vec{OM}$ . Comme, par raison de symétrie, seule la composante selon  $\vec{u}_\theta$  est non nulle, on ne s'intéresse qu'à celle-ci, c'est à dire  $B = \int d\vec{B} \cdot \vec{u}_\theta = \int dB_\theta$  avec

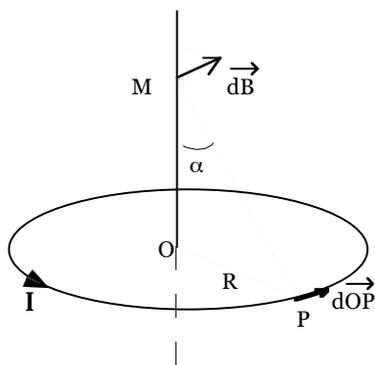
$$dB_\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{(d\vec{OP} \wedge \vec{OM}) \cdot \vec{u}_\theta}{\|\vec{PM}\|^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dOP \cdot PM \cos \alpha}{\|\vec{PM}\|^3} (\vec{u}_z \wedge \vec{u}_\rho) \cdot \vec{u}_\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dOP \cos \alpha}{\|\vec{PM}\|^2}$$

Or,  $OP = PM \sin \alpha = a \tan \alpha$  d'où  $dOP = \frac{a}{\cos^2 \alpha} d\alpha$  et on obtient alors

$$B = \int dB_\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos \alpha}{a} d\alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$

#### 1.3.2- Spire circulaire (sur l'axe)

Considérons maintenant le cas d'une spire circulaire de rayon  $R$ , parcourue par un courant permanent  $I$ . On ne s'intéresse ici qu'au champ magnétique sur l'axe  $z$  de la spire.



La densité de courant étant toroïdale et invariante par rotation autour de l'axe z, c'est à dire

$$\vec{j}(\rho, \theta, z) = j(\rho, z) \vec{u}_\theta,$$

le champ magnétique sera poloidal

$$\vec{B}(\rho, \theta, z) = B_\rho(\rho, z) \vec{u}_\rho + B_z(\rho, z) \vec{u}_z$$

Cependant, sur l'axe z, la composante radiale du champ s'annule et il ne reste qu'une composante selon z.

En projetant la loi de Biot et Savart sur z on obtient

$$dB_z = \frac{\mu_0 I dOP \sin \alpha}{4\pi \|\vec{PM}\|^2} = \frac{\mu_0 I dOP \sin^3 \alpha}{4\pi R^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \sin^3 \alpha d\theta$$

$$B_z = \oint_{\text{spire}} dB_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \sin^3 \alpha \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \alpha = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

### I.3.3- Solénoïde infini (sur l'axe)

Un solénoïde est constitué d'un enroulement d'un fil conducteur autour d'un cylindre. On suppose que ce fil est suffisamment mince pour pouvoir modéliser ce solénoïde comme une juxtaposition de spires coaxiales, avec N spires par unité de longueur. Chaque spire est alors parcourue par un courant permanent I.

Comme pour la spire simple vue plus haut, les propriétés de symétrie du courant montrent que le champ magnétique du solénoïde, qui est la somme vectorielle du champ créé par chaque spire, est suivant z uniquement.

Autour d'un point P situé en z, sur une épaisseur dOP=dz, il y a Ndz spires. Ces spires créent donc un champ en un point M quelconque de l'axe

$$dB = \frac{\mu_0 N I dz}{2R} \sin^3 \alpha$$

où la position z est reliée à l'angle par  $\tan \alpha = \frac{R}{z}$ . Si on prend la différentielle de cette expression, on obtient

$$dz = \frac{R}{\sin^2 \alpha} d\alpha$$

Attention au signe de dz qui doit être cohérent avec notre convention de signe. Ici, dz > 0 pour un dα > 0. Le champ magnétique total s'écrit donc

$$B = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} dB = \frac{\mu_0 N I}{2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha d\alpha = \frac{\mu_0 N I}{2} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2)$$

Pour un solénoïde infini, on a α<sub>1</sub> → 0 et α<sub>2</sub> → π, d'où un champ sur l'axe

$$B = \mu_0 N I$$

