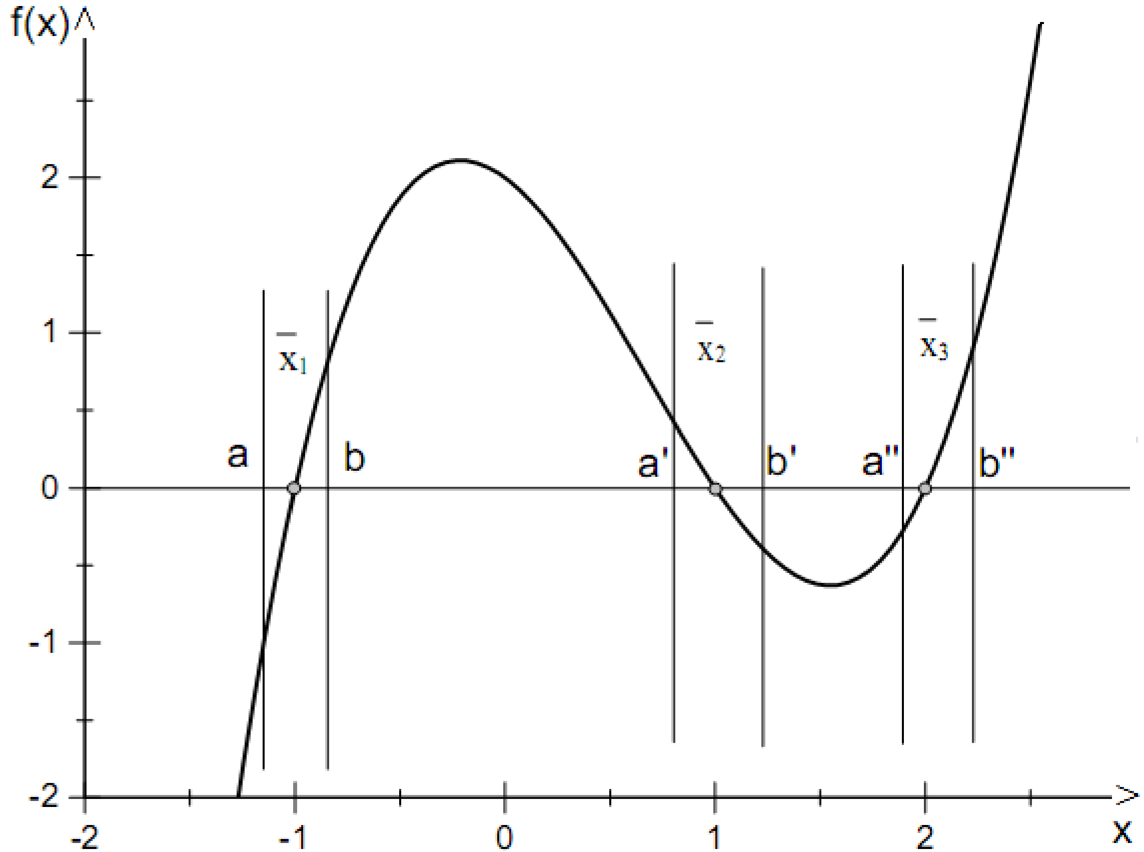
Cours Outils de programmation pour les mathématiques -Partie 03-

Équations non linéaire

Dans cette partie de cours, on va étudier trois méthodes pour la résolution des équations non linéaires à une variable. Ces équations ne possèdent pas une ou des racines exactes qui peuvent être calculées directement, c'est pourquoi on fait recours aux méthodes numériques pour trouver les solutions approchées de ces équations.

Ces méthodes numériques permettent seulement le calcul d'une seule racine sur un intervalle bien choisi. Donc si l'équation possède plus d'une racine, il est nécessaire de les localiser dans des intervalles choisis soigneusement et de faire le calcul pour chaque racine à part.

Équations non linéaire



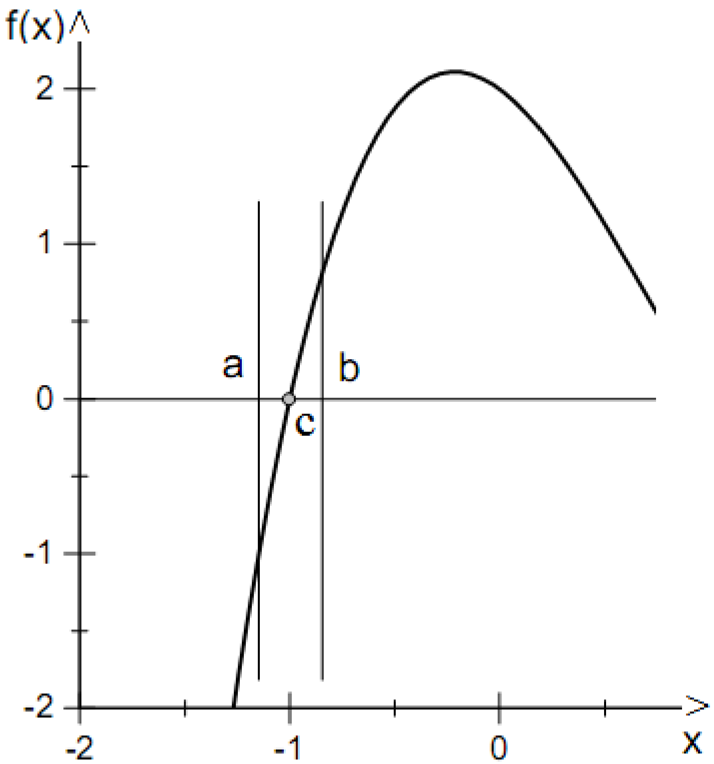
On remarque que chaque sous intervalle Vérifie la condition

$$f(a)f(b) < 0, \quad f(a')f(b') < 0 \text{ et } f(a'')f(b'') < 0$$

Équations non linéaire/ Méthode de dichothomie

C'est la méthode la plus simple et qui nécessite le plus de calculs, elle est basée sur le cas particulier du théorème des valeurs intermédiaires qui dit que :

- ✓ Si **f(x)** est continue sur l'intervalle **[a,b]**, c-à-d si **f'(x)** garde le même signe sur l'intervalle **[a,b]**
- ✓ Si **f(a)** et **f(b)** ne sont pas de même signe, il existe au moins un réel **c** compris entre **a** et **b** tel que **f(c) = 0** (car 0 est compris entre **f(a)** et **f(b)**).



Équations non linéaire/ Méthode de dichothomie

Principe:

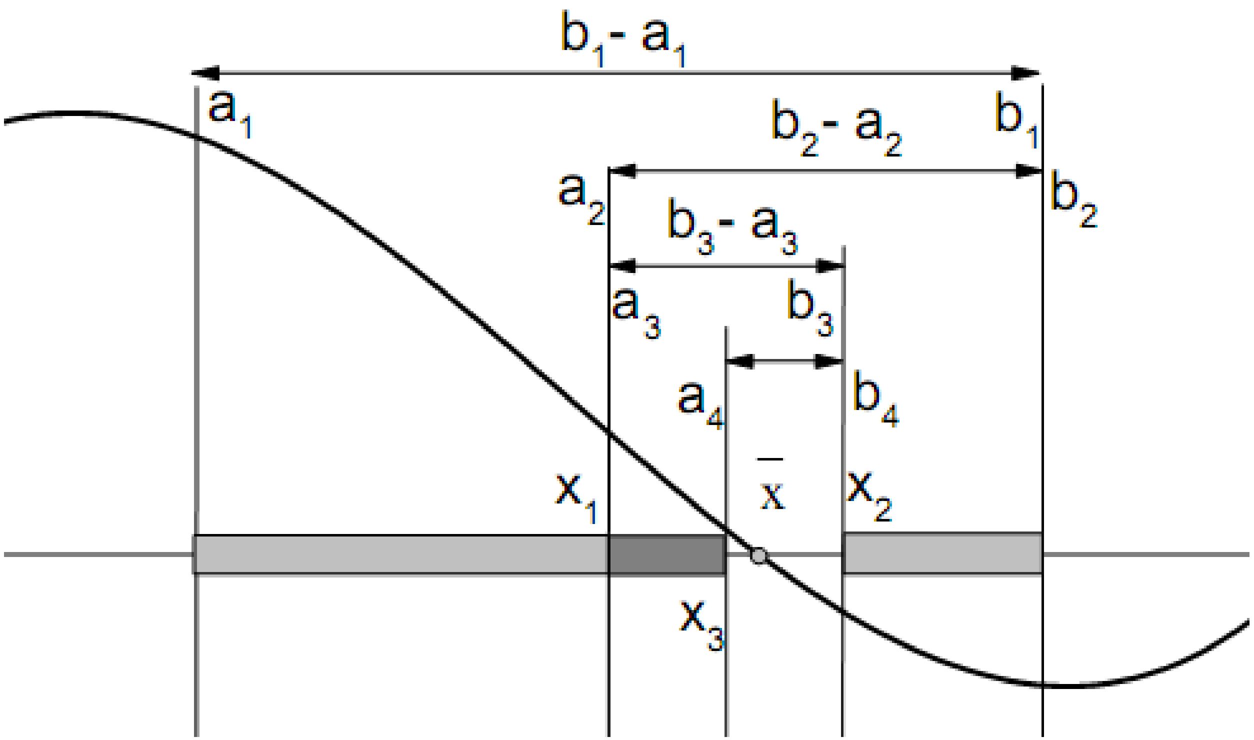
Une fois la racine est localisée dans un intervalle [a, b],

1) On divise l'intervalle en deux parties égales tel que $c = \frac{a+b}{2}$
2) On passe à l'étape de vérification

- Si **f(c)=0** alors x'=c et la méthode terminé
- Sinon si **f(c) ≠ 0** , alors la racine appartienne obligatoirement à l'un de deux intervalles.
  - Si **f(a)*f(c) < 0**, donc x' est dans [a,c]. On pose b = c
  - Si **f(b)*f(c) < 0**, donc x' est dans [c,b]. On pose a = c

3) Recommence de l'étape 1 pour la nouvelle intervalle.

Équations non linéaire/ Méthode de dichothomie



a

Nombre de divisions pour avoir une précision ε donné

Puisque chaque fois on divise l'intervalle en deux parties égales, on a :

$$b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2};$$

$$b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{1}{2}\frac{b-a}{2} = \frac{b-a}{2^2};$$

$$b_3 - a_3 = \frac{b_2 - a_2}{2} = \frac{1}{2}\frac{b-a}{2^2} = \frac{b-a}{2^3};$$

....

$$b_n - a_n = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} = \frac{1}{2}\frac{b-a}{2^{n-1}} = \frac{b-a}{2^n}.$$

Équations non linéaire/ Méthode de dichothomie

Puisque $\overline{x} \in [a_n, b_n] = [a_n, x_n] \cup [x_n, b_n]$

On a $|x_n - \overline{x}| \leq \frac{1}{2}\frac{b-a}{2^n} = \frac{b-a}{2^{n+1}}$

Il faut que la différence $|x_n - \overline{x}|$ qui est l'erreur du calcul soit inférieure à une précision donnée ε, c'est-à-dire :

$$|x_n - \overline{x}| \leq \varepsilon$$

Alors il suffit que $\frac{b-a}{2^{n+1}} \leq \varepsilon$ Cela donne $n \geq \frac{ln\left(\frac{b-a}{2\varepsilon}\right)}{ln(2)}$

Le nombre de divisions ne dépend que de la longueur de l’intervalle est de la précision ε.

Le problème de cette méthode est qu’elle est lente c’est pourquoi elle est utilisée pour démarrer d’autres méthodes plus élaborées.

Équations non linéaire/ Méthode de dichothomie

Calculons la première racine de l'équation **ln(x) – x^2 +2 = 0** qui appartient à **[0.1, 0.5]** avec une précision de **0.01**.

En premier lieu on va Calculer le nombre de divisions à faire en fonction de l'intervalle et la précision.

$$n \geq \frac{ln\left(\frac{b-a}{2\varepsilon}\right)}{ln(2)} = \frac{ln\left(\frac{0,5-0,1}{2*0,01}\right)}{ln(2)} = 4,32$$

On prend **n=5** puisque **n** est entier et supérieur à **4.32**.

Équations non linéaire/ Méthode de dichothomie

$$f(a_1) = f(0.1) = -0.313 \quad \text{et} \quad f(b_1) = f(0.5) = 1.057$$

$$x_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} = \frac{0.1 + 0.5}{2} = 0.30; \quad f(0.3) = 0.706 > 0 \text{ donc } a_2 = 0.1 \text{ et } b_2 = 0.3$$

$$x_2 = \frac{a_2 + b_2}{2} = \frac{0.1 + 0.3}{2} = 0.20; \quad f(0.2) = 0.351 > 0 \text{ donc } a_3 = 0.1 \text{ et } b_3 = 0.2$$

$$x_3 = \frac{a_3 + b_3}{2} = \frac{0.1 + 0.2}{2} = 0.15; \quad f(0.15) = 0.080 > 0 \text{ donc } a_4 = 0.1 \text{ et } b_4 = 0.15$$

$$x_4 = \frac{a_4 + b_4}{2} = \frac{0.1 + 0.15}{2} = 0.125; \quad f(0.125) = -0.095 < 0 \text{ donc } a_5 = 0.15 \text{ et } b_4 = 0.125$$

$$x_5 = \frac{a_5+b_5}{2} = \frac{0.15+0.125}{2} = 0.1375; \; f(0.1375) = -0.003 \text{ La solution est } \; x_5 = 0.1375$$

Équations non linéaire/ Méthode du point fixe

Soit g une fonction définie sur un intervalle [a,b], le point $\overline{x}$ qui vérifie $\overline{x} = g(\overline{x})$ avec $\overline{x} \in [a,b]$ est dit point fixe de la fonction g.

Cette méthode est basée sur le principe du point fixe d'une fonction, on écrit l'équation ***f(x)=0*** sous la forme ***x=g(x)***, ensuite on cherche le point fixe $\overline{x}$ de la fonction g. Pour cela on crée la suite $x_{n+1} = g(x_n)$ **(n=0,1,2….)** avec x_0 donnée (par dichotomie par exemple).

Équations non linéaire/ Méthode du point fixe

On démarre de x_0 pour n=0, on calcule $x_1 = g(x_0)$ ensuite n=1, on calcule $x_2 = g(x_1), \ldots, x_{n+1} = g(x_n)$. Sous certaines conditions, la suite $\{x_n\}_{n=0,\infty}$ converge vers la solution $\bar{x}$ point fixe de g et solution de l'équation $f(x)=0$.

Exemple:

Ecrire l'équation $f(x)=0$ sous la forme $x = g(x)$ si

$$f(x) = x^2 + 3e^x - 12$$

Équations non linéaire/ Méthode du point fixe

$f(x) = x^2 + 3e^x - 12$

On peut écrire

$$x = g_1(x) = x^2 + 3e^x - 12 + x$$

$$x = g_2(x) = \sqrt{12 - 3e^x}$$

Pour pouvoir choisir la forme de "**g**" adéquate pour le calcul, un critère de convergence de cette méthode doit être vérifié.

Critère de convergence et d'arrêt de calculs:

Soit g une fonction dérivable définie de **[a,b]** → **[a,b]** tel que (condition suffisante) :

$$|g'(x)| \leq k < 1 \qquad \forall\, x \in [a,b]$$

Alors la suite $\{x_n\}_{n=0,\infty}$ définie par $x_{n+1} = g(x_n)$ **(n=0,1,2, …)** converge indépendamment de la valeur de x_0 vers l'unique point fixe $\bar{x}$ de g.

Équations non linéaire/ Méthode du point fixe

Si plusieurs formes de **g** vérifient cette condition, on aura plusieurs valeurs de **k**. On choisit celle avec la valeur minimale de **k**. En pratique, on calcule

$$k = \max_{x\in[a,b]} |\dot{g}(x)|$$

qui doit être inférieure à l'unité pour que la méthode converge.

On arrête les calculs pour cette méthode lorsque la différence absolue entre deux itérations successives est inférieure à une certaine précision ε donnée.

$$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$$

Équations non linéaire/ Méthode du point fixe

Trouver la première racine de l'équation $\ln(x) - x^2 + 2 = 0$ qui appartient à **[0.1, 0.5]** avec une précision de $\varepsilon = 0.01$. On écrit cette équation sous la forme $x = g(x)$ et on vérifie les conditions de convergence. On peut écrire :

$$x = e^{x^2-2} = g_1(x) \quad \text{et}$$

$$x = \sqrt{\ln(x) + 2} = g_2(x)$$

Vérifions la condition de convergence pour cette méthode

$$k = \max_{x \in [a,b]} |\grave{g}(x)|$$

Équations non linéaire/ Méthode du point fixe

$$k_1 = \max_{x\in[0.1,0.5]} |\grave{g}(x)| = \max_{x\in[0.1,0.5]} \left|2xe^{x^2-2}\right|$$

$\grave{g}(x)$ strictement croissante donc

$$k_1 = \max_{x=0.5} \left|2 * 0.5 * e^{0.5^2-2}\right| = 0.174 < 1$$

Cette forme converge.

On écrit : $x_{n+1} = g_1(x_n) = e^{x_n^2-2} (n = 0, 1, 2, \dots)$

Commençons $\mathbf{x_0=0.3}$ le milieu de l'intervalle initial donné.

Équations non linéaire/ Méthode du point fixe

$$\boldsymbol{n = 0}, \qquad \boldsymbol{x_1 = g_1(x_0) = e^{x_0^2-2}} = 0.148$$

On calcule $|x_1 - x_0| = 0.152 > \varepsilon$;

On continue $\boldsymbol{n = 1},\ \boldsymbol{x_2 = g_1(x_1) = e^{x_1^2-2}} = 0.138.$

On calcule $|x_2 - x_1| = 0.01 > \varepsilon$

On continue $\boldsymbol{n = 2},\ \boldsymbol{x_3 = g_1(x_2) = e^{x_2^2-2}} = 0.138.$

On calcule $|x_3 - x_2| = 0.00 < \varepsilon$, **La solution est $x_3 = 0.138$**

Équations non linéaire/ Méthode de Newton

C'est la méthode la plus efficace et la plus utilisée.

Soit f : R → R une fonction donnée et x_0 un point donné.

On peut écrire la (n + 1)^{ème} itération, approximant x', de la manière suivante :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (n=0,1,2,....)$$

Cette suite, si elle converge, doit converger vers la solution x' de *f(x)=0*. On remarque que f'(x) doit être non nulle.

Critère de convergence

Soit une fonction f définie sur [a,b]. La fonction f doit vérifier les conditions de convergence suivante :

- $f(a).f(b) < 0$
- $f'(x)$ et $f''(x)$ sont non nulles et gardent un signe constant sur l'intervalle donné.

Critère d'arrêt de calcul

Si la condition de convergence est vérifiée, le procédé itératif doit converger. Cela veut dire que chaque nouvelle itération est meilleure que la précédente, de ce fait on peut dire que si on a une précision **ε** , on arrête le calcul lorsque la différence absolue entre deux approximations successives est inférieure à la précision donnée et on prend x_{n+1} comme solution de f(x)=0. C'est-à-dire :

La solution est x_{n+1} si $|x_{n+1} - x_n| \leq \varepsilon$

Trouver la première racine de l'équation $\mathbf{f(x) = ln\ (x) – x^2 + 2 = 0}$ qui appartient à **[0.1, 0.5]** avec une précision de $\boldsymbol{\varepsilon = 0.0001}$.

On a vérifier dans les méthodes précédentes que f (0,1) * f (0,5) < 0.

On calcule maintenant la dérivée première et seconde de f et on vérifie les conditions de convergence.

On a $\mathbf{f'(x)=1/x -2x}$ qui est strictement décroissante et positive sur l'intervalle donné : $\mathbf{f'(x)>0}$.

$\mathbf{f''(x) = -1/x^2 -2}$. $f''(x) < 0$ sur l'intervalle donné.

Équations non linéaire/ Méthode de Newton

La condition de convergence est vérifiée. On écrit donc :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{\ln(x_n) - x_n{}^2 + 2}{\frac{1}{x_n} - 2x_n}, \quad (n=0,1,2,\dots).$$

Commençons x_0=0.3 le milieu de l'intervalle initial donné :

$$n = 0, \qquad x_1 = x_0 - \frac{\ln(x_0) - x_0{}^2 + 2}{\frac{1}{x_0} - 2x_0} = 0.0417$$

Équations non linéaire/ Méthode de Newton

On calcule $|x_1 - x_0| > \varepsilon$;

On continue $\boldsymbol{n = 1},\ \boldsymbol{x_2} = 0.0910.$

On calcule $|x_2 - x_1| => \varepsilon$

On continue $\boldsymbol{n = 2},\ \boldsymbol{x_3} = 0.1285.$

On calcule $|x_3 - x_2| > \varepsilon$;

On continue $\boldsymbol{n = 3},\ \boldsymbol{x_4} = 0.1376.$

On calcule $|x_4 - x_3| => \varepsilon$

On continue $\boldsymbol{n = 4},\ \boldsymbol{x_5} = 0.1379.$

On calcule $|x_5 - x_4| => \varepsilon$

On continue n=5, x_6=0,1379, |x6- x5| < ε

La solution est x_6=0,1379

FIN