TD N° 3 Transformée de Fourier

Exercice 1 :

1. Calculer la transformée de Fourier du signal suivant :

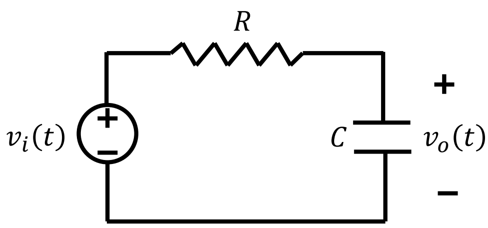
$$x(t) = e^{-at}u(t), \;\; a > 0 \qquad u(t) : \text{ échelon unitaire}$$

2. Tracer les courbes d'amplitude et de phase
3. Déduire la transformée de Fourier du signal

$$y(t) = x(t-b), \;\; b > 0$$

Exercice 2 :

Soit le circuit-RC de la figure ci-contre :



1. Déterminer l'équation différentielle qui relie la tension d'entrée $v_i(t)$ el la tension de sortie $v_o(t)$.
2. Appliquer la transformée de Fourier pour donner la fonction de transfert du circuit :

$$H(\omega) = \frac{V_o(\omega)}{V_i(\omega)}$$

3. On excite le circuit par une tension d'entrée $v_i(t) = 2e^{-3t}u(t)$, déduire la tension de sortie $v_o(t)$. (on suppose que le condensateur est déchargé).

4. Utiliser la table de transformée de Fourier pour déterminer la réponse impulsionnelle $h(t)$ de ce circuit.

5. Donner le produit de convolution :

$$v_o(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau) d\tau$$

On donne $R = 2\Omega, C = 1F$

Exercice 3 :

Considérons le filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure ω_c et son spectre est donné par :

$$H(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_c \\ 0 & |\omega| \geq \omega_c \end{cases}$$

1. Calculer la transformée de Fourier inverse $h(t)$ (la réponse impulsionelle) de ce filtre.

Solutions

Exercice 1 :

1. Transformée de Fourier du signal :

$$X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at}u(t)e^{-j\omega t}dt = -\frac{1}{(a+j\omega)}\left[e^{-(a+j\omega)t}\right]_0^{+\infty}$$

$$X(\omega) = \frac{1}{a+j\omega}, a > 0$$

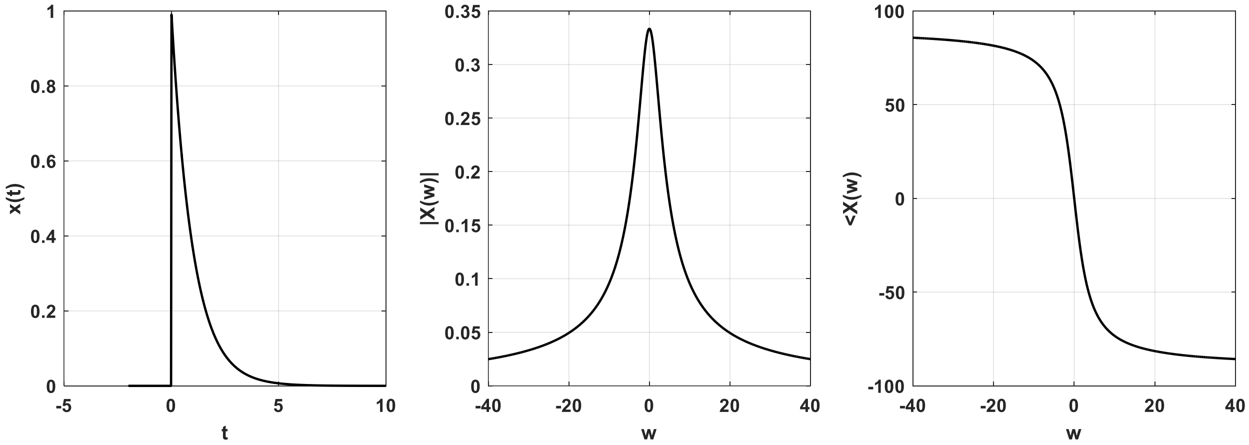
2. Courbes d'amplitude et de phase :

- Courbe d'amplitude :

$$|X(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}}$$

- Courbe de phase :

$$< X(\omega) = < 1 - < \left((a+j\omega)\right) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$



Spectre d'amplitude et de phase pour $a = 1$

3. La transformée de Fourier du signal $y(t)$:

Le signal $y(t)$ correspond au signal $x(t)$ retardé par la valeur b, alors

$$y(t) = x(t-b) = e^{-a(t-b)}u(t-b)$$

$$Y(\omega) = \mathcal{F}\{y(t)\} = \mathcal{F}\{x(t-b)\} = X(\omega)e^{-j\omega b} = \frac{1}{a+j\omega}e^{-j\omega b}$$

Exercice 2 :

1. Equation différentielle :

$$\begin{cases} v_i(t) = Ri(t) + v_o(t) \\ \dfrac{dv_o}{dt} = \dfrac{1}{c}i(t) \end{cases} \Rightarrow RC\frac{dv_o}{dt} + v_o(t) = v_i(t)$$

2. Fonction de transfert :

$$\boldsymbol{\mathcal{F}}\left\{RC\frac{dv_o}{dt}+v_o(t)=v_i(t)\right\}=RCj\omega V_o(\omega)+V_o(\omega)=V_i(\omega)$$

$$H(\omega)=\frac{V_o(\omega)}{V_i(\omega)}=\frac{1}{1+RCj\omega}$$

3. La tension de sortie $v_o(t)$:

- La TF de la tension d'entrée :

$$V_i(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}2e^{-3t}u(t)e^{-j\omega t}=\frac{2}{3+j\omega}$$

Alors en peut écrire :

$$V_o(\omega)=H(\omega)V_i(\omega)=\frac{2}{(1+RCj\omega)(3+j\omega)}$$

$$V_o(\omega)=\frac{2}{3RC-1}\cdot\frac{1}{\frac{1}{RC}+j\omega}-\frac{2}{3RC-1}\cdot\frac{1}{3+j\omega}$$

$$v_o(t)=\frac{2}{3RC-1}\left(\boldsymbol{\mathcal{F}}^{-1}\left\{\frac{1}{\frac{1}{RC}+j\omega}\right\}-\boldsymbol{\mathcal{F}}^{-1}\left\{\frac{1}{3+j\omega}\right\}\right)$$

D'après la table de la TF :

$$v_o(t)=\frac{2}{3RC-1}\left(e^{-t/_{RC}}-e^{-3t}\right)u(t)=0.4\left(e^{-t/_2}-e^{-3t}\right)u(t)$$

4. La réponse impulsionnelle $h(t)$:

$$h(t)=\boldsymbol{\mathcal{F}}^{-1}\left\{\frac{1}{RC}\cdot\frac{1}{1/_{RC}+j\omega}\right\}=\frac{1}{RC}e^{-t/_{RC}}u(t)$$

5. Produit de convolution :

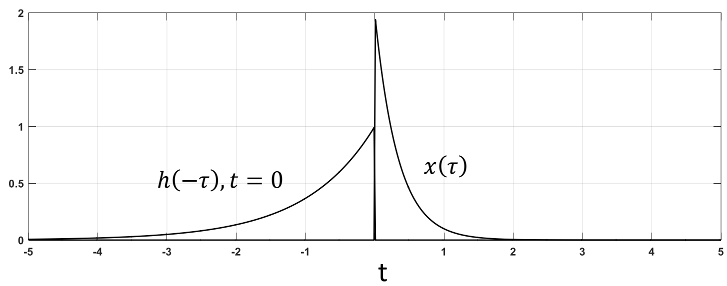
On détermine graphiquement le produit de convolution :

$$v_0(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

Avec

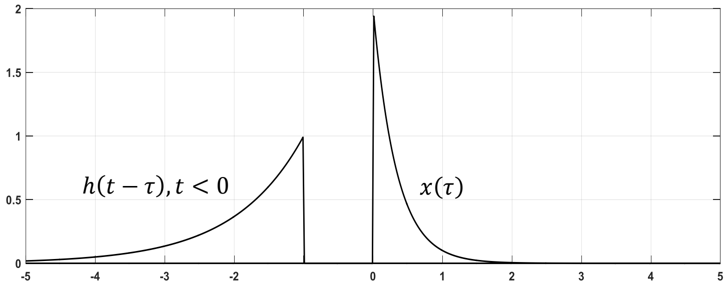
$$x(\tau)=2e^{-3\tau}u(\tau),h(\tau)=\frac{1}{RC}e^{-\tau/_{RC}}u(\tau)$$

On trace $x(\tau)$ et $h(-\tau)$ dans un même graphique



- Pour $t < 0$ pas de chevauchement entre les signaux $x(\tau)$ et $h(t-\tau)$

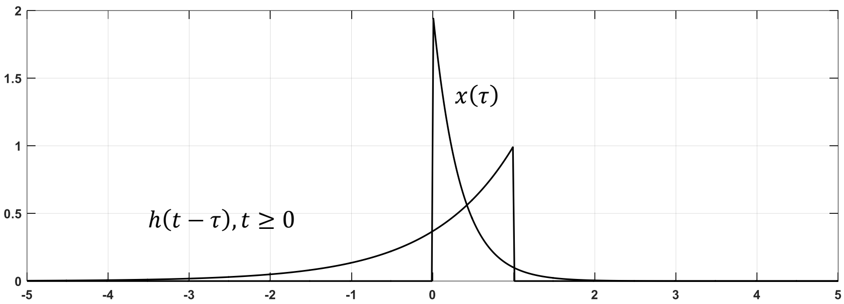
$$v_o(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = 0$$



- Pour $t \geq 0$ il y'a chevauchement

$$v_o(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \frac{2}{RC}\int_{0}^{t} e^{-3\tau}e^{-t/_{RC}}e^{\tau/_{RC}}d\tau$$

$$v_o(t) = \frac{2}{3RC-1}\left(e^{-t/_{RC}} - e^{-3t}\right)$$



$$v_o(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{2}{3RC-1}\left(e^{-t/_{RC}} - e^{-3t}\right) & t \geq 0 \end{cases} \Rightarrow v_o(t) = \frac{2}{3RC-1}\left(e^{-t/_{RC}} - e^{-3t}\right)u(t)$$

Exercice 3 :

- Transformée de Fourier inverse :

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega t}d\omega$$

$$h(t) = \frac{1}{\pi t}\left(\frac{e^{j\omega_c t} - e^{-j\omega_c t}}{2j}\right) = \frac{\sin\omega_c t}{\pi t} = \frac{\omega_c}{\pi}\operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_c}{\pi}t\right)$$