CHAMP ELECTROSTATIQUES CREES PAR UNE DISTRIBUTION DE CHARGES (PRINCIPE DE SUPERPOSITION)

Le champ électrostatique total créé en un point M par deux charges ponctuelles q et q' est la somme vectorielle des champs électrostatiques créés en M par chacune des charges.

Cas d'un système de charges : Lorsque *n* charges q_i ponctuelles existent simultanément en des points $M_1, M_2, \ldots, M_n$, le principe de superposition permet d'écrire :

– pour le champ résultant en un point *M* (avec $r_i = M_iM \neq 0$) :

$$\bar{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \cdot \frac{q_i}{r_i^2}\overline{u_{M_iM}} \quad = K\sum_i \frac{q_i}{r_i^2}\overline{u_{M_iM}}$$

Cas des distributions continues de charges : Dans le cas où les dimensions du corps chargé sont importantes telqu'on puisse pas le considérer comme charge ponctuelle, il faut savoir la distribution des charges dans ce corps. Ce là peut avoir une répartition uniforme suivant une droite, une surface plane ou un volume. L'idée de ce type de calcul est de « découper » la distribution de charges en parties élémentaires (longueur, surface, volume selon le cas étudié) assimilables à des charges ponctuelles et d'exprimer le champ électrostatique élémentaire créé au point *M* par cette charge « ponctuelle » d*q* placée en un point *P* de la distribution de charge.

Le principe de superposition permet alors de sommer (au moyen d'une intégrale simple, double, ou triple) les contributions élémentaires du champ pour obtenir le champ total créé au point *M* par l'ensemble de la distribution de charges.

On peut résumer ainsi les différentes étapes de ce raisonnement:

- schéma de la distribution de charges et du point *M* où on cherche $\bar{E}$;
- expression et représentation du champ élémentaire $\overline{dE}$ créé par une charge élémentaire placée en un point *P* quelconque de la distribution ;
- choix des axes et projection de $\overline{dE}$ sur ces axes ;

- éventuelles considérations de symétries permettant de connaître la direction du champ total $\bar{E}$;
- choix des variables d'intégration (un si la distribution est linéique, deux si la distribution est surfacique et trois si la distribution est volumique) ;
- expressions des angles de projection et de la distance *PM* en fonction de ces variables ;
- intégration sur chaque axe, en faisant attention au domaine d'intégration.

Selon le type de distribution de charges étudiée, on aura un des trois cas suivants:

- $\mathrm{d}q = \lambda(P).\mathrm{d}l$ (Répartition de charge linéique) $\mathrm{E(M)} = \mathrm{K}\int_{\widehat{\mathrm{AB}}}\lambda\mathrm{dl}/\mathrm{r}^2$
- $\mathrm{d}q = \sigma(P).\mathrm{d}S$ (Répartition de charge surfacique) $\mathrm{E(M)} = \mathrm{K}\iint_{\mathrm{S}}\sigma\mathrm{ds}/\mathrm{r}^2$
- $\mathrm{d}q = \rho(P).dv$ (Répartition de charge volumique) $\mathrm{E(M)} = \mathrm{K} \quad {}_{\tau}\rho\mathrm{d}v/\mathrm{r}^2$
- À partir de l'expression du champ electrique dE, on choisit des variables d'intégration

Par exemple, on peut ainsi calculer le champ électrostatique créé en un point *M* (situé à une distance *x* du fil) par un fil rectiligne uniformément chargé, avec une densité linéique de charge λ, et dont la section est négligeable devant sa longueur (fil pouvant être considéré « de longueur infinie »), un élément de longueur Δx contenant une charge ΔQ, la densité de la charge (comme la densité de masse) soit $\lambda = \lim_{\Delta \mathrm{x} \quad 0}\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{X}}$

Donc la densité de charge se calcul par la charge de l´unité de longueur. La charge dQ contenu dans l´élément de longueur ***dx*** est donnée par $\boldsymbol{dQ = \lambda dl}$. La densité est généralement une fonction du point.

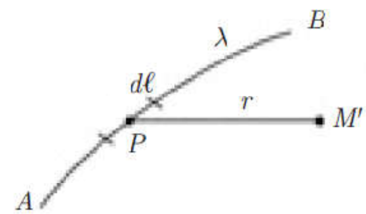
La charge élémentaire ***dQ*** crée un champ électrique ***dE*** en un point *M* de l´espace. Le champ total est obtenu à la fin par la somme de tous les champs électriques crée par chacune de charge élémentaire $\boldsymbol{dQ}$ en transformant la somme P en intégrale R. $\boldsymbol{E} = \int \boldsymbol{dE}$.

Pour un fil de longueur infinie chargé uniformément

Lorsque la charge électrique est répartie de façon continue sur un fil, on définit une *densité linéique de charge électrique.*

• La charge $\boldsymbol{dq}$ contenue sur un tronçon élémentaire de longueur $\boldsymbol{dl}$, situé au voisinage du point $\boldsymbol{P}$, est

$\boldsymbol{dq = \lambda(P)dl}$.



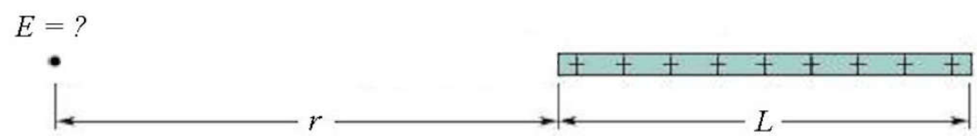
• Le champ créé par un fil chargé est, par superposition :

$\bar{E}(M) = K\int_{\widehat{AB}} \lambda dl / r^2 \bar{u}_{pM}$

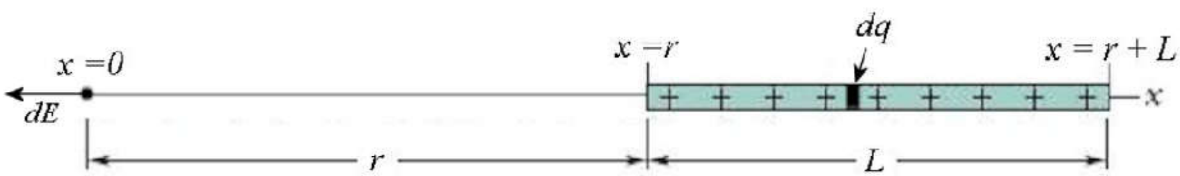
Exemple :

1. Champ vis-à-vis du bout d'une tige uniformément chargée

On va maintenant déterminer le champ à l'endroit indiqué sur la figure.



Pour y arriver, on va placer un axe des x avec l'origine au point où on veut savoir le champ. On a alors



On prend un petit morceau de tige à la position x de longueur dx et dont la charge est dq.

Ce petit morceau fait un champ dont la grandeur est $dE = k\frac{dq}{x^2}$

à la position $x = 0$. La charge dq dépend de la longueur du petit morceau dx. On trouve cette charge en multipliant la charge linéique par la longueur du petit morceau.

$$dq = \lambda dx$$

La grandeur du champ dE est donc $dE = k\frac{\lambda dx}{x^2}$

(Si la charge linéique variant en fonction de la position, on remplacerait maintenant λ par la fonction qui donne sa valeur en fonction de x)

On trouve le champ total en sommant tous les champs faits par chacun des petits morceaux. Cela veut dire qu'on fait l'intégrale et que nos bornes d'intégration sont les deux extrémités de la tige.

$$E = \int_r^{r+L} k\frac{\lambda dx}{x^2}$$

Comme k et λ sont des constantes ici, on obtient

$$E = k\lambda \int_r^{r+L} \frac{dx}{x^2} = k\lambda \left[-\frac{1}{x}\right]_r^{r+L}$$

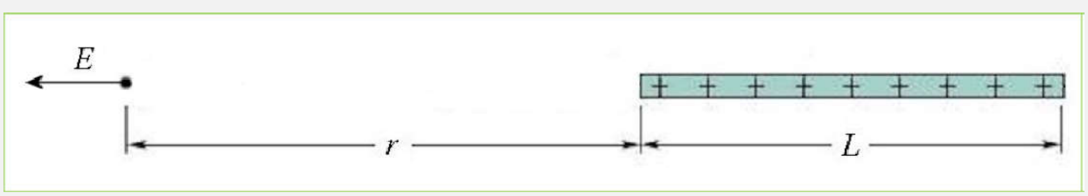
$$E = k\lambda \left(\frac{1}{r+L} - \frac{1}{r}\right)$$

En écrivant ces fractions avec le même dénominateur, on obtient

$$E = k\lambda \left(\frac{r}{r(r+L)} - \frac{(r+L)}{r(r+L)}\right)$$

pour arriver finalement au résultat suivant.

Champ électrique vis-à-vis du bout d'une tige uniformément chargée



Grandeur $E = \frac{k|\lambda|L}{r(r+L)} = \frac{k|Q|}{r(r+L)}$

Direction

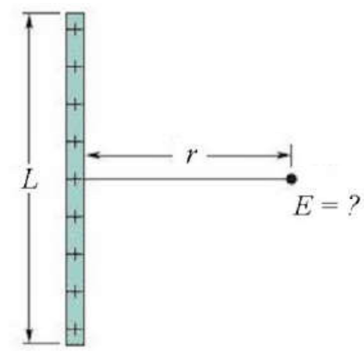
Le champ est vers la tige si elle est chargée négativement

Le champ est dans la direction opposée à la tige si elle est chargée positivement

(Notez que si la longueur de la tige est très petite par rapport à la distance de la tige, L devient négligeable et on retrouve le champ fait par une charge ponctuelle)

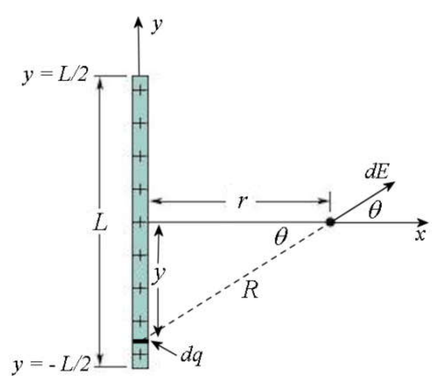
2. Champ vis-à-vis du milieu d'une tige uniformément chargée

On va maintenant déterminer le champ à l'endroit indiqué sur la figure.



Pour y arriver, on va placer des axes des x et des y avec l'origine au milieu de la tige. On prend un petit morceau de tige à la position y, de longueur dy et dont la charge est dq. Ce petit morceau fait un champ dont la grandeur est $dE = k\frac{Kdq}{R^2}$

On a alors



La charge dq dépend de la longueur du petit morceau dy. On trouve cette charge en multipliant la charge linéique par la longueur du petit morceau.

$dq = \lambda.dl = \lambda.dy$

La grandeur du champ dE est donc $dE = \frac{K.\lambda.dy}{R^2}$

Avant d'additionner les champs faits par chacun des petits morceaux, il faut séparer ce champ en composantes.

$$dE_x = \frac{K\lambda dy}{R^2}cos\theta$$

$$dE_y = \frac{K\lambda dy}{R^2} sin\theta$$

Or, on retrouve cet angle dans le triangle rectangle de la figure. Sur cette figure, on peut voir que

$$cos\theta = \frac{r}{R} \qquad\qquad sin\theta = \frac{y}{R}$$

(il y a un signe négatif devant le *y* pour obtenir une valeur positive, car la valeur de *y* est négative.) On a donc

$$dE_x = \frac{K\lambda dy}{R^2} cos\theta = \frac{K\lambda r dy}{R^3}$$

$$dE_y = \frac{K\lambda dy}{R^2} sin\theta = \frac{K\lambda y dy}{R^3}$$

$$dE_x = \frac{K\lambda r dy}{(y^2 + r^2)^{3/2}}$$

$$dE_y = \frac{K\lambda y dy}{(y^2 + r^2)^{3/2}}$$

On trouve le champ total en sommant tous les composantes des champs faits par chacun des petits morceaux. Cela veut dire qu'on fait l'intégrale et que nos bornes d'intégration sont les deux extrémités de la tige

$$E_x = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{K\lambda r dy}{(y^2+r^2)^{3/2}} \;; \qquad E_x = \left[\frac{k\lambda y}{r\sqrt{y^2+r^2}}\right]_{-L/2}^{L/2}$$

$$E_x = \quad \frac{k\lambda \frac{L}{2}}{r\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + r^2}} \quad \frac{k\lambda \frac{L}{2}}{r\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + r^2}}$$

$$E_y = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{-K\lambda y dy}{(y^2+r^2)^{3/2}} \qquad E_y = \left[\frac{k\lambda}{\sqrt{y^2+r^2}}\right]_{-L/2}^{L/2}$$

$$E_y = \quad \frac{k\lambda}{\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + r^2}} \quad \frac{k\lambda}{\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + r^2}}$$

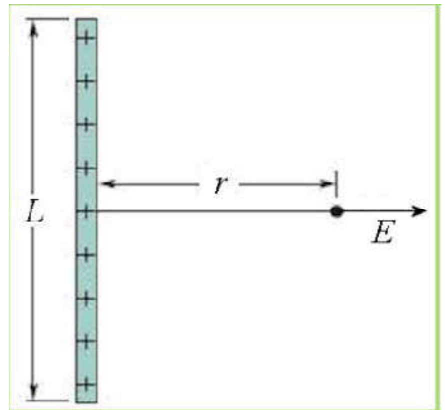
En simplifiant le tout, on obtient $E_x = \left(\frac{2k\lambda L}{r\sqrt{L^2+4r^2}}\right)$ $\qquad E_y = 0$

Ainsi, on a

Champ électrique vis-à-vis du milieu d'une tige uniformément chargée

Grandeur

$$E = \frac{2k|\lambda|L}{r\sqrt{L^2 + 4r^2}} = \frac{2k|Q|}{r\sqrt{L^2 + 4r^2}}$$



Direction

Le champ est dirigé dans la direction opposée à la tige si elle est chargée positivement

Le champ est dirigé vers la tige si elle est chargée négativement

(Notez que si la longueur de la tige est très petite par rapport à la distance de la tige, *L* devient négligeable et on retrouve le champ fait par une charge ponctuelle)

3. Champ d'une tige infinie uniformément chargée

En électricité, on s'intéresse souvent au champ fait par une tige infinie uniformément chargée. Bien que cela n'existe pas vraiment, c'est souvent une bonne approximation du champ d'une tige si $r << L$. On trouve le champ avec

$$E = \lim_{L \quad \infty} \frac{2k\lambda L}{r\sqrt{L^2 + 4r^2}}$$

Quand L devient très grand, $4r^2$ devient négligeable et on a alors

$$E = \lim_{L \quad \infty} \frac{2k\lambda L}{r\sqrt{L^2}}$$

$$E = \lim_{L \quad \infty} \frac{2k\lambda L}{rL}$$

Ce qui nous amène à

Champ électrique d'une tige infinie uniformément chargée

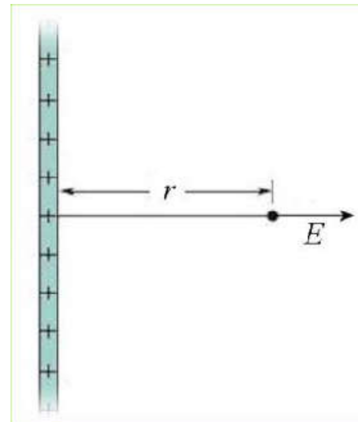
Grandeur

$$E = \frac{2k|\lambda|}{r} = \frac{|\lambda|}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

Direction

Le champ est dirigé dans la direction opposée à la tige si elle est chargée positivement

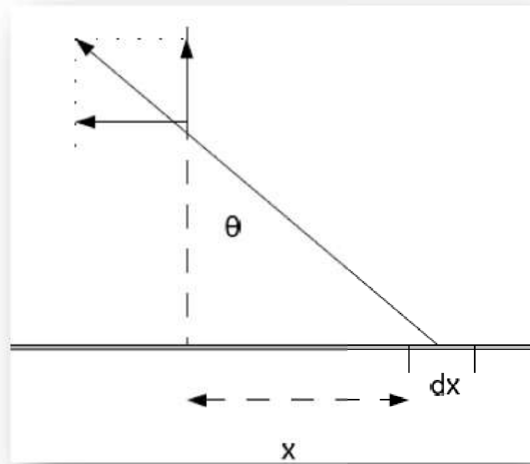
Le champ est dirigé vers la tige si elle est chargée négativement



Il se peut qu'à ce stade-ci vous vous disiez que vous n'avez pas de fun dans cette section. C'est normal. Les calculs qu'on vient de faire sont assez complexes pour le niveau collégial et ils sont là surtout pour illustrer la procédure. Dites-vous d'ailleurs que vous n'avez pas à reproduire cette procédure. Pour l'instant, c'est uniquement pour vous montrer que ce calcul n'est pas si facile. Imaginez ce que ça peut avoir l'air quand on calcule le champ fait par un objet en deux ou trois dimensions… (Heureusement, on verra des techniques qui facilitent grandement le calcul plus tard)

On va maintenant cesser de faire toute la preuve de la formule pour trouver le champ électrique pour donner uniquement le résultat du calcul pour deux cas important : les plaques infinies uniformément chargées et une sphère chargée.

On considère un fil de longueur infinie d'épaiceur négligeable où la charge est ditrubuée linéairement avec une densité linéaire constante λ. On divise le fil en petits éléments linéaires dx portant la charge élémentaire $dQ = \lambda dx$. On veut calculer le champ E crée par le fil en un point P situé à une distance R du fil.



on a $d\bar{E} = dE_x\bar{\imath} + dE_y\jmath$

ainsi $dE_x = dE \sin\theta$ et $dE_y = dE \cos\theta$.

donc

$$dE_x = k\frac{dQ}{r^2}\sin\theta = k\frac{\lambda dx}{r^2}\sin\theta$$

$$dE_y = k\frac{dQ}{r^2}\cos\theta = k\frac{\lambda dx}{r^2}\cos\theta$$

on a aussi

$$\tan\theta = \frac{x}{R} \Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2\theta}d\theta = \frac{dx}{R}$$

et $r = \frac{R}{\cos\theta}$

en remplaçant dans (??) et (??) on obtient

$$dE_x = k\frac{\lambda d\theta}{R}\sin\theta$$

$$dE_y = k\frac{\lambda d\theta}{R}\cos\theta$$

quand x varie entre ∞ *et* $+\infty$ l´angle θ *varie entre* $\pi/2$ *et* $\pi/2$ donc

$$E_x = \int dE_x = \frac{k\lambda}{R}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin\theta d\theta$$

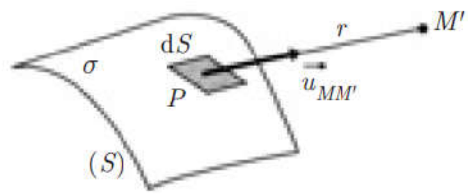
$$E_y = \int dE_y = \frac{k\lambda}{R}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta d\theta$$

ceci donne $E_x = 0$ $\quad E_y = 2\lambda/R$.

Enfin on a $\bar{E} = 2\frac{\lambda}{R}\jmath$.

Le champ électrique produit par un fil est proportionnel à al distance et il est normale au fil. Il sorte du fil si le fil est chargé positivement ou il est dirigé vers le fil s´il est chargé négativement.

➢ Pour une surface chargée uniformément : Lorsque la charge électrique est répartie de façon continue sur une surface, on définit une *densité surfacique de charge électrique.* La charge dq contenue sur une surface élémentaire d'aire dSP , située au voisinage du point P ,est $dq = \sigma(P)dS_p$.



• Le champ créé par une distribution D chargée en surface est, par superposition :

$$\bar{E}(M) = K\iint_s \sigma ds/r^2 \bar{u}_{MM'}$$

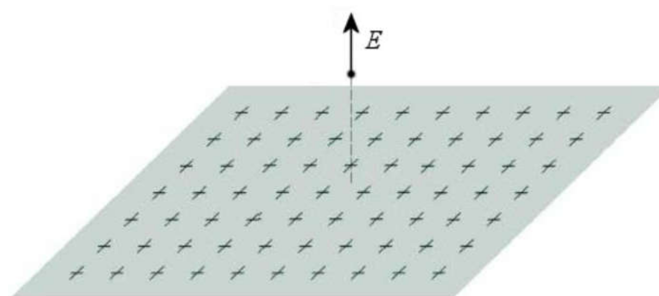
Les plaques infinies uniformément chargées

Sur une plaque uniformément chargée, la charge est répartie sur une surface. On caractérise les charges sur une surface par la charge surfacique (σ) qui est la charge par unité de surface. $\sigma = \frac{charge}{surface}$

Elle est en C/m². Les calculs montrent que le champ est

Champ électrique d'une plaque infinie uniformément chargée

Grandeur $E = 2\pi k|\sigma| = \frac{|\sigma|}{2\varepsilon_0}$



Direction

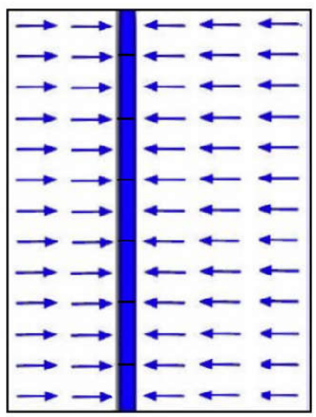
Le champ est dirigé dans la direction opposée à la plaque si elle est chargée positivement

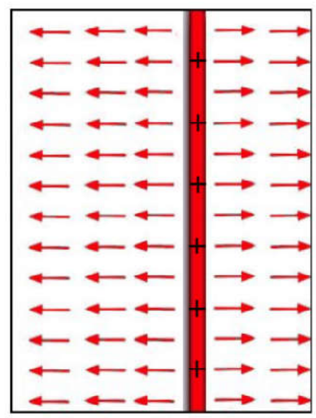
Le champ est dirigé vers la plaque si elle est chargée négativement

Remarquez comme la valeur du champ ne dépend pas de la distance de la plaque. Qu'on soit près ou loin de la plaque, le champ est toujours le même. Évidemment, ceci est vrai uniquement si la plaque est infinie. Si la plaque n'est pas infinie, ce résultat est une excellente approximation tant que notre distance de la plaque est beaucoup plus petite que les dimensions de la plaque.

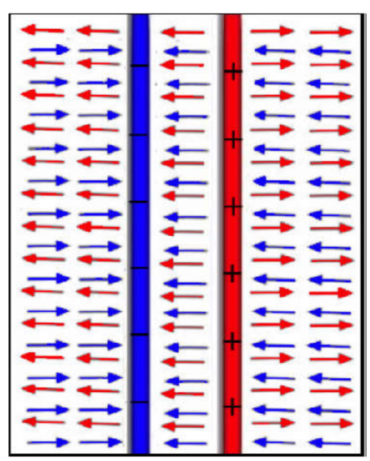
Nous prouverons cette formule du champ par une plaque infinie uniformément chargée au chapitre suivant en utilisant une technique qui facilite beaucoup les calculs.

Connaissant ce résultat, on peut trouver le champ qu'il y a entre deux plaques parallèles de mêmes dimensions et ayant des charges identiques, mais de signes contraires. La figure montre les champs faits par chacune des plaques séparément.





En plaçant les deux plaques l'une à côté de l'autre, les champs se superposent.



Le champ de la plaque positive est en rouge et le champ de la plaque négative est en bleu.

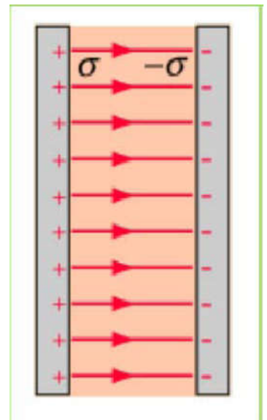
On remarque que les champs s'annulent au-dessus des plaques et au-dessous des plaques. Par contre, les champs de chacune des plaques s'additionnent entre les plaques. Comme les deux plaques ont la même charge surfacique (en valeur absolue) on a $E_{entre\ les\ plaques} = \frac{|\sigma|}{2\varepsilon_0} + \frac{|\sigma|}{2\varepsilon_0}$

On a donc

Champ électrique entre deux plaques parallèles de mêmes dimensions et ayant des charges identiques de signe opposé.

Grandeur $E = 4\pi k|\sigma| = \frac{|\sigma|}{\varepsilon_0}$

Direction Le champ est dirigé de la plaque positive vers la plaque négative



Le résultat est indépendant de la position entre les plaques, ce qui signifie que le champ est uniforme entre les plaques. On obtient en fait le champ entre deux plaques infinies. Ce résultat est toutefois une excellente approximation du champ entre les plaques si la distance entre les plaques est beaucoup plus petite que la largeur et la longueur des plaques et qu'on est loin du bord des plaques.

Exemple

Deux plaques parallèles de 10 cm x 20 cm sont distantes de 1 mm. Si on donne une charge de 5 μC à une plaque et une charge de -5 μC à l'autre plaque, quelle est la grandeur du champ entre les deux plaques?

La valeur absolue de la charge surfacique de chacune des plaques est

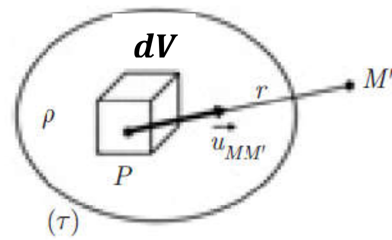
$$\sigma = \frac{Q}{A} = \frac{5\mu C}{0.1m \times 0.20m} = 2.5 \times 10^{-4} \frac{C}{m^2}$$

Le champ est donc :

$$E = \frac{|\sigma|}{\varepsilon_0} = \frac{2.5 \times 10^{-4}\,\frac{C}{m^2}}{8.854 \times 10^{-12}\,\frac{C^2}{Nm^2}} = 2.82 \times 10^6\,\frac{N}{C}$$

➢ Pour un volume chargé uniformément : Lorsque la charge électrique est répartie de façon continue dans un volume, on définit une *densité volumique de charge électrique* .

La charge dq contenue dans un élément de volume d$V_{(P)}$, situé au voisinage du point $\boldsymbol{P}$, est : $\boldsymbol{dq = \rho(P)dV_p}$.



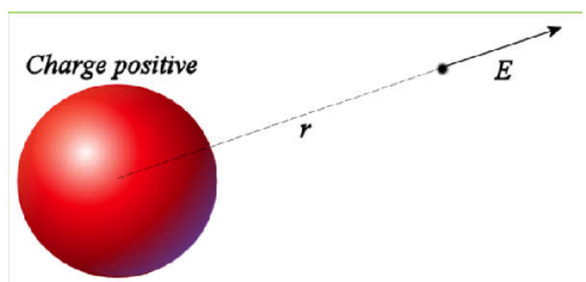
Le champ créé par une distribution D chargée en volume est, par superposition : $\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{M}) = \boldsymbol{K} \quad {}_{\tau}\boldsymbol{\rho dV/r^2\bar{u}_{MM'}}$

La sphère

Le champ fait par une sphère chargée est

Champ électrique fait par une sphère chargée.

Grandeur $E = k\frac{|Q|}{r^2} = \frac{|Q|}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$



Direction

Le champ est dirigé dans la direction opposée à la sphère si elle est chargée positivement

Le champ est dirigé vers la sphère si elle est chargée négativement

Ce résultat est valide tant que la distribution de charge dans la sphère est la même dans toutes les directions à partir du centre, donc tant que la distribution de charge dans la sphère a une symétrie sphérique. On pourra démontrer cette formule au chapitre suivant sans avoir à faire l'intégrale en trois dimensions.

CIRCULATION DU CHAMP ELECTROSTATIQUE et POTENTIEL ELECTROSTATIQUE

DEFINITION DU POTENTIEL ELECTROSTATIQUE : On peut démontrer que la circulation du champ électrostatique (qu'il soit créé par une charge ponctuelle, un ensemble de plusieurs charges ponctuelles, ou une distribution continue de charges) entre deux points A et B ne dépend pas du parcours effectivement suivi entre A et B, mais seulement des états A et B :

CIRCULATION DU CHAMP ELECTRIQUE :

Considérons une courbe liant deux points A et B orienté de A vers B. La circulation du champ $\bar{E}(M)$ sur un élément de parcours $\overline{dl}$ s'écrit : $d\mathcal{C} = \bar{E}(M) \cdot \overline{dl}$

$\overline{dl}$: désigne le déplacement élémentaire le long de la courbe

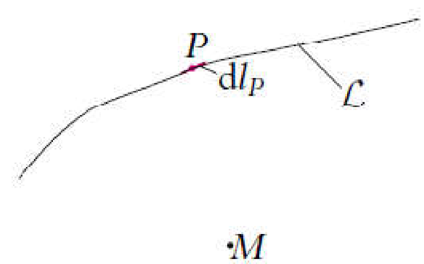


Figure 16. Courbe liant deux points A et B

Le champ électrostatique $\bar{E}$ est un champ conservatif ou encore à circulation conservative.

On sait alors que l'on peut écrire cette intégrale comme la différence d'une fonction, appelée potentiel électrostatique V, entre les points A et B :

$$\boldsymbol{\mathcal{C}_{\bar{E}/AB} = \int_A^B \bar{E}.\overline{dl} = V(A) \quad V(B)}$$

Cette relation définit, à une constante près, le potentiel électrostatique en un point M : $V(M)$. Il faudra donc préciser à chaque fois l'origine choisie (qui donne la valeur de la constante d'intégration).

Cette définition du potentiel électrostatique peut aussi s'écrire d'une autre manière. En

effet, $\int_A^B dV = VB - VA = \quad \int_A^B \bar{E}.\overline{dl}$ Ceci étant vrai quels que soient les points A et B, on peut en déduire que : $dV(M) = \quad \bar{E}(M) \cdot \overline{dl}$

et par définition du gradient : $dV(M) = \overline{grad}V(M) \cdot \overline{dl}$

Ce qui est aussi équivalent à $\bar{E}(M) = \quad \overline{grad}\,V(M)$

Exemple du fil infini uniformément chargé

On reprend l'exemple du fil infini pour lequel on a établi l'expression du champ électrostatique qu'il crée en un point *M* au chapitre précédent. On rappelle son expression en coordonnées cylindriques : $\bar{E}(M) \; = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\overline{u_r}$

Le calcul de la circulation *C* du champ électrostatique le long de **G** s'écrit en coordonnées cylindriques :

$$C = \int_{M\epsilon\Gamma} \bar{E}(M).\overline{dl} = \int_{M\epsilon\Gamma} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} dr = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} ln(\frac{r}{r_0})$$

donc $V(M) \; = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} ln(\frac{r}{r_0})$

En choisissant l'origine des potentiels pour $r = r0$ et non à l'infini : la distribution est infinie et il y a donc des charges à l'infini, ce qui interdit de prendre l'origine des potentiels à l'infini.

Remarque :

La circulation du champ de *A* vers *B* est égale à la *valeur initiale moins la valeur finale* du potentiel (est indépendante du parcours choisi, puisqu'elle ne dépend que de la différence de potentiel entre *A* et *B)*. Par contre, la circulation de $\bar{E}$ dépend du sens de parcours choisi : c'est ce sens qui fixe le signe de la différence de potentiel. Il faut donc toujours orienter le parcours avant de calculer la circulation de $\bar{E}$. Du fait que le champ électrostatique est un champ de gradient, on en déduit immédiatement que sa circulation le long d'un contour fermé est nulle.

En effet, on a : $\oint_c \bar{E}.(\overline{dl}) = \oint_c dV(M) = V(M_i) \quad V(M_f) = 0$ car $M_i = M_f$ du fait du caractère fermé de *C*. Et en particulier, sur un parcours fermé : $\oint_c \bar{E}.(\overline{dl}) = 0$.

Le « rond » autour de l'intégrale signifie que la circulation est calculée le long d'une courbe fermée.

Calculs de potentiels électrostatiques

Potentiel créé par une charge ponctuelle : Nous avons vu que le champ électrostatique créé en un point M de l'espace par une charge ponctuelle q placée en un point O s'écrit :

$\bar{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{\bar{u}}{r^2}$ $ou\ r = \|r\| = \|\overline{OM}\|, q\ alg$ébrique, et $\bar{u} = \frac{\overline{OM}}{r}$

On a $dV(M) = \ \bar{E}(M)\overline{d}l(M), ce\ qui\ donne\ ici : dV(M) = \ \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r^2}$

– Pour une source ponctuelle située à la distance r du point M on obtient, par intégration: $V\ (M) = V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \ cte, \quad ou \ \ r = \|r\| = \overline{\|OM\|}$

Remarque En général, s'il n'y a pas de charge à l'infini, on choisit l'origine des potentiels à l'infini (c'est-à-dire $V(r) = 0$ quand $r \quad +\infty$, on ne peut choisir $V(\infty) = 0$ que s'il n'y a pas de charge source située à l'infini

Potentiel créé par un ensemble de charges ponctuelles De même que pour le champ électrostatique, le principe de superposition s'applique pour le potentiel électrostatique.

Par conséquent, le potentiel électrostatique créé en un point M par un ensemble de charges ponctuelles qi placées aux points Oi peut s'écrire :

$$\mathcal{C} = \int_{M\epsilon\Gamma}\bar{E}(M).\overline{dl} = \int_{M\epsilon\Gamma}\left(\sum_i \bar{E}_i(M)\right).\overline{dl} = \sum_i \int_{M\epsilon\Gamma}\bar{E}_i(M).\overline{dl}$$

Et pour chaque champ $Ei\ (M)$, on utilise le même procédé que pour une charge ponctuelle unique:

$$\int_{M\epsilon\mathcal{C}}\bar{E}_i(M).\overline{dl} = \ \int_{M\epsilon\mathcal{C}}\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}d\left(\frac{1}{P_iM}\right)$$

soit finalement :

$$\mathcal{C} = \ \sum_i \int_{M\epsilon\mathcal{C}}\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}d\left(\frac{1}{P_iM}\right) = \ \int_{M\epsilon\mathcal{C}}d\left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\sum_i \frac{q_i}{P_iM}\right)\right]$$

d'où, pour la circulation élémentaire : $d\mathcal{C} \ = \quad dV$ avec le potentiel électrostatique

$$V\ (M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{\boldsymbol{qi}}{\boldsymbol{P_iM}} +\ cte$$

$V(M) = \sum Vi(M)$ si on peut choisir une origine des potentiels commune.

– Pour un ensemble de charges ponctuelles, V s'écrit au point M :

$$V\ (M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{\boldsymbol{qi}}{\boldsymbol{ri}} +\ cte$$

Calcul direct du potentiel créé par une distribution continue de charges

Le principe du calcul est identique à celui utilisé pour la détermination du champ électrostatique créé par une distribution continue de charges .

Après avoir réalisé un schéma de la distribution de charges et du point M où on cherche V, on écrit l'expression du potentiel élémentaire dV créé au point M par une charge élémentaire dq placée en un point P quelconque de la distribution et considérée comme suffisamment petite pour être assimilée à une charge ponctuelle.

Il convient ici de choisir l'origine des potentiels (en général à l'infini quand il n'y a pas de charges à l'infini).

$$\mathrm{d}V\ (M) = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 pM} + cste$$

Selon le type de distribution de charges étudiée, on aura un des trois cas suivants:

$\mathrm{d}q\ = \lambda(P).\mathrm{d}l$ (Répartition de charge linéique) $\mathrm{V(M)} = \mathrm{K}\int_{\widehat{\mathrm{AB}}} \lambda \mathrm{dl/r} + \mathrm{cst}$

$\mathrm{d}q\ = \sigma(P).\mathrm{d}S$ (Répartition de charge surfacique) $\mathrm{V(M)} = \mathrm{K}\iint_{\mathrm{s}} \sigma \mathrm{ds/r} + \mathrm{cst}$

$\mathrm{d}q\ = \rho(P).dV$ (Répartition de charge volumique) $\mathrm{V(M)} = \mathrm{K}\quad {}_{\tau}\rho \mathrm{dV/r} + \mathrm{cst}$

À partir de l'expression du potentiel élémentaire dV, on choisit des variables d'intégration

(Une si la distribution est linéique, deux si la distribution est surfacique et trois si la distribution est volumique).

On détermine les expressions de $dl, dS, ou\ d\tau$, et de la distance PM, en fonction de ces variables.

En utilisant le principe de superposition, on somme alors les contributions élémentaires dV issues de ces charges élémentaires dq par une intégrale (simple, double ou triple selon que la distribution de charges est linéique, superficielle ou volumique) sur la distribution chargée, en faisant attention au domaine d'intégration .

Pour une distribution continue de charges, V s'écrit :

$$V\,(M) = 1/(4\pi\varepsilon_0\,) \quad {}_{v}\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{r})\boldsymbol{dV}/\boldsymbol{r} + \,cte$$

Où v est le volume occupé par les charges sources.

Dans tous les cas, $\bar{E}(M) \;=\; \overline{grad}\,V(M)$

On note qu'il s'agit ici d'intégrales scalaires contrairement à ce qu'on avait pour le calcul du champ où l'intégration est vectorielle et où il fallait projeter pour obtenir des intégrales scalaires.

Lorsque la distribution est infinie, il convient de changer l'origine des potentiels. L'expression obtenue dans le cas d'une charge ponctuelle (et utilisée ici pour les distributions d'extension finie) n'est plus valable. Les intégrales précédentes qui découlent de l'application du principe de superposition n'opèrent pas sur des expressions valables

et n'ont donc plus de raison d'être. On notera que, mathématiquement, ce problème se traduit par le fait qu'il n'y a *a priori* aucune garantie que les intégrales précédentes soient convergentes lorsque le point P tend vers l'infini.

À retenir :

L'électrostatique étudie les interactions électriques entre des distributions de charges immobiles (ou en mouvement infiniment lent).

– Le champ créé par une charge source ponctuelle est un champ vectoriel à symétrie sphérique.

– Un champ vectoriel à symétrie sphérique et dont la norme varie en $1/r^2$ est conservatif.

– Tout champ électrostatique est dit « conservatif », ce qui signifie que sa circulation sur une courbe fermée est nulle. Il dérive alors d’un potentiel scalaire V.

– une propriété vectorielle, le champ électrostatique :

$$\bar{E}(M) = K\frac{q}{r^2}\overline{u_{OM}}$$

– une propriété scalaire, le potentiel électrostatique (défini à une constante près) :

$$V(M) = k.\frac{q}{r} + \text{cte}$$

– et une relation entre les deux propriétés :

$$\bar{E}(M) = \quad \overline{\text{grad}}\, V(M) \quad \text{ou } \mathrm{d}V = \quad \bar{E}(M).d\bar{M}$$

– Le champ électrique est orienté vers les potentiels *décroissants*

– Le potentiel s’exprime en volt (V).

– $V\ (M)$ Représente le travail à fournir pour amener une charge témoin q_o de l’infini au point M, divisé par la charge q_o.

– L’énergie potentielle électrostatique d’une charge q située au point M où règne le potentiel $V\ (M)$ s’écrira donc : $U\ =\ qV\ (M)$

Remarque : le fait que $\bar{E}$ dérive d’un potentiel découle de la conservation de l’énergie.

Énergie potentielle électrostatique

L’énergie potentielle électrostatique $Ep(M)$ d’une particule chargée q’ placée en un point M où le potentiel électrostatique est $V(M)$ s’écrit : $Ep(M) = \acute{q} \cdot V(M)$.

Dans le système international, on mesure l’énergie potentielle électrostatique, comme toute énergie, en joules.

Dans le domaine atomique et subatomique cependant, une autre unité est souvent utilisée, l’électron-volt (eV) : 1 eV = 1,6 · $10^{\ 19}$ J.

On utilise aussi des multiples de cette unité : 1 keV = 10^3 eV, 1 MeV = 10^6 eV, 1 GeV = 10^9 eV, 1 TeV = 10^{12} eV...

Calcul d’un champ électrostatique à partir du potentiel(ou l’inverse)

LOI LOCALE et LOI INTÉGRALE

- **Forme locale**

La loi $\bar{E}(M) = \quad \overline{grad}\, V(M)$ permet de déterminer $\bar{E}$ en un point quelconque si V est connu en ce point (ou l'inverse). Elle présente un caractère général, libéré de toute considération de symétrie susceptible d'apparaître à l'échelle globale. En effet, le potentiel et le champ électrostatiques créés en un point M par une distribution de charges vérifient la relation : $\bar{E}(M) = \quad \overline{grad}(V(M))$

Il convient alors de choisir un système de coordonnées en cohérence avec les variables qui interviennent dans l'expression de $V(M)$ et de calculer $\overline{grad}(V\ (M))$ dans ce système de coordonnées.

Cette loi peut s'écrire sous une autre forme, également locale : en effet, sachant que $\overline{rot}\ (\overline{grad}\ V)\ \equiv \bar{0}\,, on\ peut\ écrire : \ \overline{rot}\ \bar{E}\ = \bar{0}$

Le champ électrique $\bar{E}$ est dit irrotationnel.

- **Forme intégrale**

Soit une distribution de charges pour laquelle on connaît déjà l'expression du champ électrostatique qu'elle crée en un point M d'une certaine région de l'espace. On choisira alors un système de coordonnées adapté à la géométrie de la distribution de charge et à l'expression de $\bar{E}(M)$.

Il faudra ensuite exprimer le vecteur « déplacement élémentaire » $\overline{dl}(M)$ dans système de coordonnées afin de pouvoir calculer le produit scalaire $\bar{E}(M) \cdot \overline{dl}(M)$.

Soit par l'équation locale, valable en tout point M de l'espace :

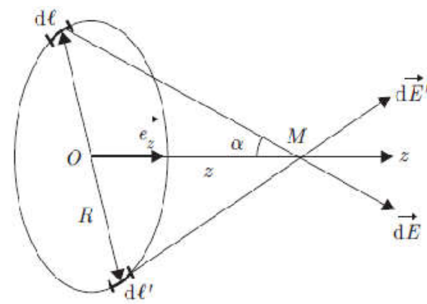
$dV\ (M)\ = \quad \bar{E}(M)\ \cdot\ \overline{dl}\ (M)$ Ce qui est aussi équivalent à $\bar{E}(M)\ = \quad \overline{grad}\ V\ (M)$

On intègre alors l'expression de dV, sans oublier de préciser l'origine choisie.

La loi $\int_{\widehat{AB}} \bar{E}.\overline{dl} = V(A) \quad V(B)$ ou encore $\oint_C \bar{E}.\overline{dl} = 0$ $\big((C) contour\ fermé\big)$ peut permettre le calcul de $\bar{E}$ en un point, mais il faut passer par un calcul à l'échelle globale. C'est dire que cette loi intégrale ne présente de l'intérêt que si l'on peut mettre en évidence des symétries permettant de faciliter le calcul (par exemple lorsque $\bar{E}$ est uniforme et peut sortir du signe$\int$) . Dans ce cas, la deuxième méthode peut s'avérer plus rapide que la première.

D'autres lois locales et intégrales seront revues par la suite (théorème de Gauss par exemple).

Exemple : *Champ créé par un fil circulaire portant une densité de charge uniforme* $\lambda = \frac{dq}{dl}$ *, en un point M de son axe* $(\overline{OM} = z)$



On suppose $\lambda > 0$

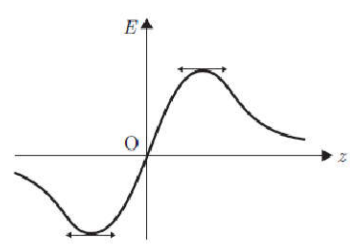
1) Calcul direct du champ $\bar{E}$

À chaque élément dl du fil, on peut faire correspondre un élément $d\acute{l}$ symétrique par rapport à O.

Par raison de symétrie, seule la composante de $\overline{dE}$ sur l'axe $\overline{Oz}$ intervient : $\bar{E}$ est porté par ez.

Il est plus élégant de remarquer que tout plan contenant *Oz* est plan de symétrie pour la distribution de charge et contient donc $\bar{E}$ (qui est un vecteur polaire). En un point de l'axe, $\bar{E}$ appartient à l'intersection de ces plans :

il est donc selon l'axe $\overline{Oz}$.



On a successivement : $dEz = dE \cos\alpha$

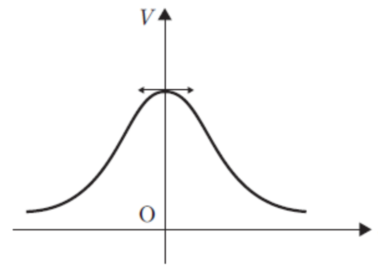
$dEz = \frac{Kdq}{Z^2+R^2} \frac{Z}{(z^2+R^2)^{1/2}}$ car $\cos\alpha = \frac{Z}{(z^2+R^2)^{1/2}}$

Avec $dq = \lambda\, dl$

$$Ez = \frac{K\lambda Z}{(Z^2+R^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi R} dl \quad et\ \bar{E} = \frac{\lambda R Z}{2\varepsilon_0 (R^2+Z^2)^{3/2}} e_z$$

On sait que $q = \lambda 2\pi R$ $\qquad \bar{E} = \frac{KqZ}{(R^2+Z^2)^{3/2}} e_z$

2) Calcul direct du potentiel



$$dV = \frac{K\, dq}{(Z^2+R^2)^{1/2}} = \frac{K\lambda dl}{(Z^2+R^2)^{1/2}}$$

$$V = \frac{K\,\lambda}{(Z^2+R^2)^{1/2}} \int_0^{2\pi R} dl$$

$$V(Z) = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0 (Z^2+R^2)^{1/2}}$$

3) Calcul du champ à partir du potentiel

$$V = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0 (Z^2+R^2)^{1/2}} + Cte \qquad \bar{E} = \overline{grad}V$$

On a successivement :

$$Ex = \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \qquad Ey = \frac{\partial V}{\partial y} = 0$$

$$Ez = \frac{dV}{dz} = \frac{\lambda R_z}{2\varepsilon_0 (Z^2+R^2)^{3/2}}$$

$$\bar{E}z = \frac{\lambda R_z}{2\varepsilon_0 (Z^2+R^2)^{3/2}} e_z$$

Calcul du potentiel à partir du champ

$$\bar{E} = \overline{grad}V \qquad E_y = E = \frac{dV}{dz} \qquad V = \int Edy$$

$$V = \int \frac{KRZ}{(R^2+Z^2)^{3/2}} dy = KR \int \frac{Z}{(R^2+Z^2)^{3/2}} dZ$$

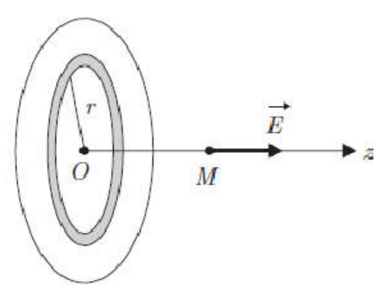
$$V = \frac{Kq}{(R^2+Z^2)^{1/2}} + cst$$

***Exemple** : Champ créé par un disque de rayon R portant une densité de charge surfacique uniforme* $\sigma = \frac{dq}{dS}$, *en un point M de son axe Oz.*

On suppose $\sigma > 0$. Calculer le potentiel et en déduire le champ.

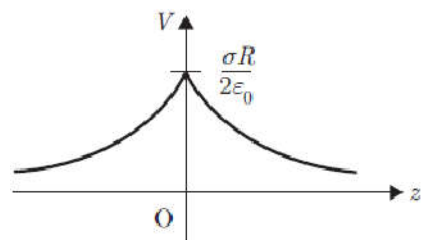
On peut considérer le disque comme engendré par un fil circulaire de rayon *r* et d'épaisseur d*r*, quand *r* varie de *O* à *R*.

De la sorte, on peut appliquer les résultats de l'exemple précédent.



Pour trouver la correspondance des densités de charge, on écrit que la charge $2\pi r\lambda$ portée par le fil de l'exemple précédent est maintenant portée par le fil de même rayon mais d'épaisseur *dr*. On a donc la correspondance : $2\pi r\lambda \rightarrow$ $2\pi r\, dr\sigma \quad et\ \lambda \rightarrow \sigma\, dr$

1) Calcul du potentiel $V = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0 (Z^2+R^2)^{1/2}}$ est à remplacer par $dV = \frac{\sigma r\, dr}{2\varepsilon_0 (Z^2+r^2)^{1/2}}$

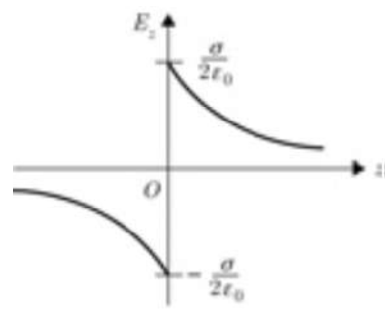


$$V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^R \frac{r\, dr}{\left({r^2}/{z^2}\right)^{1/2}}$$

$$V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[(r^2+z^2)^{1/2}\right]_0^R$$

$$V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[(R^2+z^2)^{1/2} \quad |Z|\right]$$

2) Calcul du champ



En faisant le même calcul directement, ou en passant par $\bar{E} = \quad \overline{grad}\, V$, on trouve :

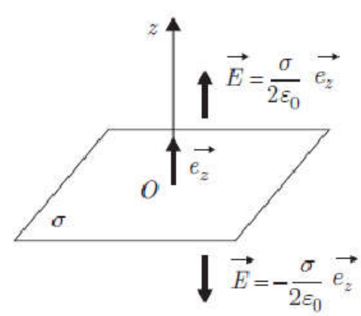
$$\bar{E} = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}\left[\frac{1}{|Z|} \quad \frac{1}{(R^2+z^2)^{1/2}}\right]\overline{ez}$$

Remarque :

• On peut noter la discontinuité du champ $\bar{E}$ au passage par le point $O(z = 0)$.

• Le champ créé par un plan portant une densité de charge σ peut se déduire du résultat relatif au disque, en faisant tendre *R* vers l'infini.

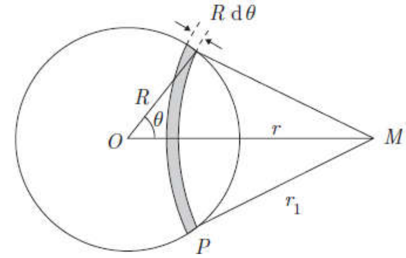
On trouve : $\bar{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{z}{|z|}\overline{ez}$



• Le calcul direct du champ $\bar{E}$ créé par un disque chargé superficiellement, en un point *M* de son axe, sera proposé comme exercice.

Exemple : *Potentiel créé par une sphère de centre O et de rayon R, chargée uniformément, en un point M extérieur à la sphère*

1) Sphère chargée en surface



Soit σ la charge surfacique.

On a successivement :$dV(M) = k\frac{dq}{r_1}$ $\qquad dq = \sigma q dS$

$dS = 2\pi.R.sin\theta.R.d\theta$

$dq = \sigma.2\pi.R.sin\theta.R.d\theta$

$$dq = \frac{Q}{2}sin\theta.d\theta$$

Où $Q = 4\pi.r^2.\sigma$ est la charge totale portée par la sphère $r_1^2 = R^2 + r^2$

$2Rr\cos\theta$

$2r_1dr_1 = 2R.r.sin\,\theta$

$$dV(M) = k\frac{Q}{2}sin\theta.d\theta\frac{dr_1}{R.r.sin\theta.d\theta}$$

$$V(M) = k\frac{Q}{2R.r}\int_{r-R}^{r+R} dr_1 = k\frac{Q}{r}$$

Tout se passe comme si la charge *Q* de la sphère était concentrée au centre *O*.

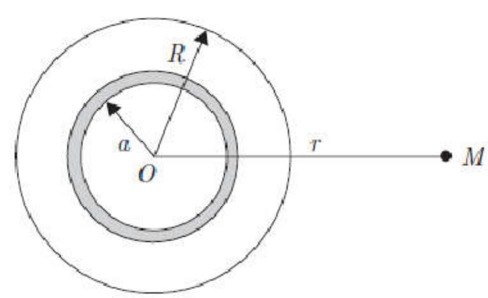
2) Sphère uniformément chargée en volume

Soit ρ la charge volumique. On peut considérer la sphère comme engendrée par une coque sphérique de rayon *a* et d'épaisseur d*a*, quand *a* varie de *O* à *R*.

Ainsi, on peut appliquer les résultats de *a)*.

On a :

$dV(M) = k\frac{dq}{r}$ $\qquad dq = 4\pi.a^2.\rho.da$



$$V(M) = k\frac{4\pi\rho}{r}\int_0^R a^2.da$$

$$V(M) = k\frac{4}{3}\pi.\rho.\frac{R^3}{r}$$

$$V(M) = k\frac{Q}{r}$$

où $Q = \frac{4}{3}\pi.R^3.\rho$ est la charge totale portée par la sphère.

Là encore, tout se passe comme si toute la charge Q de la sphère était ponctuelle et située au centre O.

Remarque :

• L'application du théorème de Gauss permettra de retrouver tous ces résultats plus rapidement (voir chapitre **3**).

• Le calcul du champ créé à l'intérieur de la sphère précédente sera fait en utilisant ce théorème.

Topographies du champ et du potentiel électrostatiques

Topographie du champ électrostatique

Lors de l'étude d'un champ, plusieurs types de courbes fournissent une représentation des caractéristiques du champ. On les définit ici dans le cas du champ électrostatique mais cela restera valable dans tous les cas où on envisagera un champ vectoriel comme le champ gravitationnel, le champ magnétostatique ou un champ de vitesse en mécanique des fluides

Lignes de champ et surfaces équipotentielles

On appelle *ligne de champ* une courbe tangente en chaque point au vecteur champ électrostatique.

Soit M un point où on cherche la ligne de champ de $\bar{E}(M)$. On note O l'origine du référentiel dans lequel on se place. La direction de la tangente à la courbe sera donnée par le vecteur $d\overline{OM}$, vecteur déplacement élémentaire du point M.

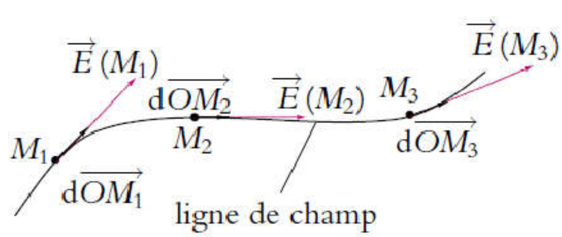


Figure 44.11 Définition d'une ligne de champ.

La définition de la ligne de champ impose que ce vecteur $d\overline{OM}$ soit colinéaire à $\bar{E}(M)$, ce qui peut se traduire par : $d\overline{OM} = k(M)\bar{E}(M)$

Où $k(M)$ est un réel dépendant du point M, ou par : $\bar{E}(M) \quad d\overline{OM} = 0$

La ligne de champ se réduit à un point dans le cas où le champ est nul.

Equipotentielles

On appelle *équipotentielle* la surface reliant l'ensemble des points ayant la même valeur

du potentiel électrostatique $V = V_0$.

V est constant : dV= $V(M)$ -$V(M')$ = 0 car $V(M) = V(M') = V0$.

pour M et M' deux points très proches sur l'équipotentielle.

Lors des représentations qui seront faites, on se placera souvent dans un plan.

Les équipotentielles se traduiront par des courbes qui sont les traces de la surface dans un plan.

Propriété 2 *Le potentiel V(M) décroît lorsque le point M se déplace le long d'une ligne de champ en suivant l'orientation de celle-ci.*

Conséquence *Une ligne de champ électrique ne peut pas être une courbe fermée.*

Remarque Il y a là une différence importante avec les lignes de champ magnétique

Propriétés des lignes de champ et des équipotentielles

Le potentiel décroît le long d'une ligne de champ

On considère un point M' de la même surface équipotentielle et infiniment proche de M. À partir de la relation $dV = \quad \bar{E}(M)\, \overline{OM}$ (relation générale entre le champ et le potentiel électrostatiques), On en déduit que le long d'une ligne de champ, la variation du potentiel est négative. En effet, $\overline{OM}$ est par définition de la ligne de champ orienté dans le même sens que le champ $\bar{E}(M)$ donc le produit scalaire de l'un par l'autre est positif.

Convergence et divergence des lignes de champ

Si le potentiel admet un extremum en un point, alors le champ électrostatique en ce point est nul et les lignes de champ en ce point peuvent prendre des directions quelconques (le vecteur nul est colinéaire à toute courbe).

En utilisant le résultat du paragraphe précédent, on obtient :

• si le potentiel est maximal en un point, les lignes de champ divergent de ce point,

• si le potentiel est minimal en un point, les lignes de champ convergent vers ce point.

Le potentiel n'admet pas d'extrema en dehors des charges

Le flux du champ électrostatique à travers une surface fermée entourant un point où le potentiel électrostatique admet un extremum est non nul du fait de la convergence ou de la divergence des lignes de champ.

En appliquant le théorème de Gauss : $\Phi = \frac{Qint}{\varepsilon_0}$

on en déduit que la charge intérieure est non nulle.

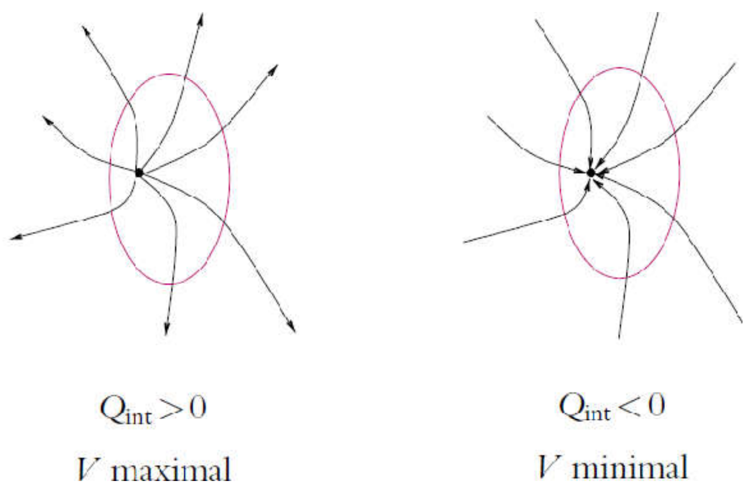


Figure 44.12 Extrema du potentiel électrostatique.

• Si $Qint > 0$, les lignes de champ sont orientées vers l'extérieur de la surface de Gauss et le champ étant orienté dans le sens des potentiels décroissants, le potentiel est maximal.

• Si $Qint < 0$, les lignes de champ sont orientées vers l'intérieur de la surface de Gauss et le champ étant orienté dans le sens des potentiels décroissants, le potentiel est minimal.

Orthogonalité des lignes de champ et des équipotentielles

Les surfaces équipotentielles V = cte sont des sphères centrées en M. En effet, sur ces surfaces, on a : $dV = \overline{grad}V.\overline{dl} = \bar{E}\overline{dl} = 0 \Rightarrow dl \perp \bar{E}$.

Implique que les équipotentielles sont les surfaces perpendiculaires en tout point au champ électrostatique qui règne en ce point.

On en déduit que dans un plan contenant les lignes de champ, ces dernières (colinéaires au champ) et les courbes équipotentielles, traces des surfaces équipotentielles dans le plan des lignes de champ (perpendiculaires au champ), sont des courbes orthogonales.

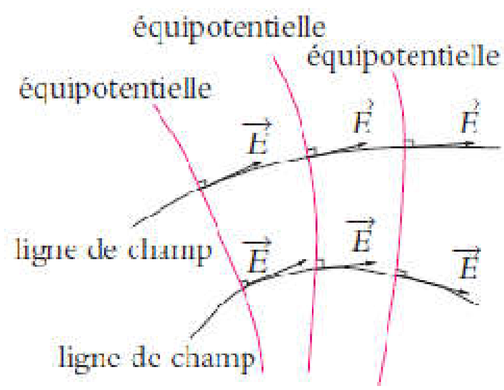


Figure 16.5 Lignes de champ normales aux équipotentielles

Propriété 1 *Les lignes de champ sont normales aux surfaces équipotentielles.*

Exemple de topographie d'un champ

Soit la distribution discrète constituée de quatre charges $q1 = e$, $q2 = 3e$, $q3 =$ $3e$ et $q4 =$ e situées respectivement aux points de coordonnées cartésiennes dans le plan $A1($ $1, 0)$, $A2(1, 0)$, $A3(0,$ $1)$ et $A4(0, 1)$. Un logiciel de simulation permet d'obtenir la carte des lignes de champ et des équipotentielles de cette distribution. Elles sont données par les figures 44.14 et 44.15.

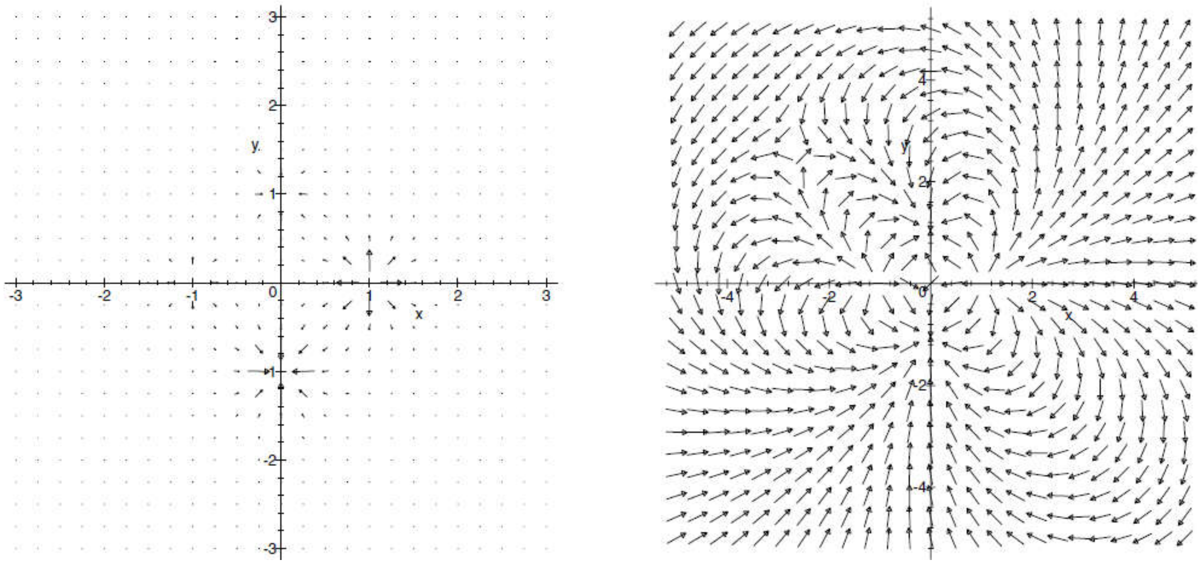


***Figure 44.14** Lignes de champ d’une distribution discrète de quatre charges. La longueur des flèches est proportionnelle à la norme du champ sur la figure de gauche ; sur la figure de droite, les flèches ont même longueur indépendamment de la norme du champ.*

On constate que les lignes de champ divergent d’un point où se trouve une charge négative et qu’elles convergent vers un point où se trouve une charge positive conformément aux propriétés précédemment énoncées. On peut ainsi à partir d’une carte de lignes de champ déterminer les points où il y a une charge et connaître le signe de cette dernière.

On remarque également sur la figure de gauche où la longueur des flèches est proportionnelle à la norme du champ que la norme du champ décroît avec la distance aux charges qui le créent. En effet, le champ est plus important à proximité des charges.

Enfin, le plan d’équation $x =$ y est un plan d’antisymétrie de la distribution de charges, le champ électrique est bien perpendiculaire à ce plan en un point de ce plan.

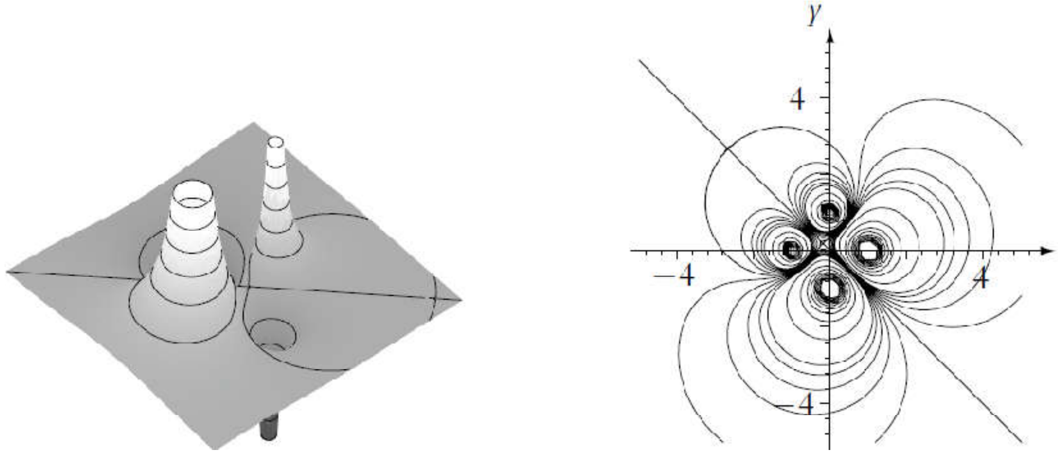


Figure 44.15 Équipotentielles d'une distribution discrète de quatre charges. Le niveau de gris traduit l'intensité relative du potentiel.

On note que les équipotentielles sont plus resserrées au voisinage des charges c'est-à-dire là où le champ est plus intense (Cf. remarques précédentes sur l'analyse des cartes de lignes de champ).

Le potentiel électrostatique est positif au voisinage d'une charge positive et négatif au voisinage d'une charge négative. Son intensité (en valeur absolue) est d'autant plus grande que la charge est importante.

On constate enfin que le potentiel décroît comme la norme du champ quand on s'éloigne des charges.