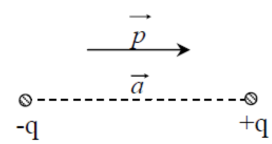
Dipôle électrique

Pour toutes les distributions envisagées jusqu'à présent, on n'a fait aucune approximation et on a calculé le champ et le potentiel électrostatiques. Dans ce chapitre, on s'intéresse au potentiel et au champ électrostatiques « loin » de la distribution, à savoir à très grande distance de la distribution par rapport aux dimensions caractéristiques de cette dernière. Pour cela, on va définir la notion de dipôle électrostatique et obtenir les expressions dans le cadre de l'approximation énoncée.

1. Définition :



On appelle ***dipôle électrostatique*** le système constitué par l'arrangement de deux charges ponctuelles égales de signes différents (*opposées   q et +q)* placées aux points *A* et *B*, distants de *a*. tels que *a* soit très petite devant les autres distances envisagées.

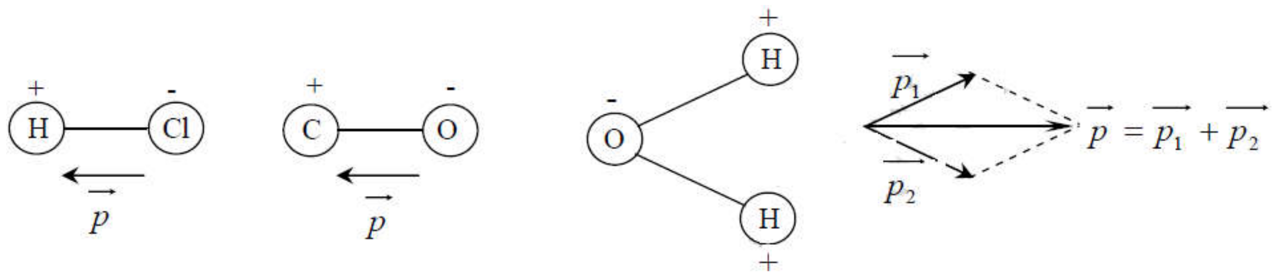
Ce système, appelé aussi doublet électrique, constitue un objet en soi, qui crée un champ et un potentiel dans l'espace environnant. Le modèle théorique du dipôle trouve son application dans la polarisation des molécules conduisant à l'approximation dipolaire de la matière.

Les calculs du champ et du potentiel créés par un dipôle se font toujours en des points très éloignés du dipôle $OM \gg a$.

Moment dipolaire : on définit alors *le moment électrique dipolaire* de la distribution

par le vecteur: $p = q\, a$

Cette étude particulière est justifiée, car on rencontre ce cas de figure dans certaines molécules (Ex: HCl, H_2O, CO, etc…………)



L'unité de cette quantité est donc, dans les unités du système international, le coulomb mètre (*C.m*).

Compte tenu des ordres de, on préfère souvent donner les moments dipolaires en debye de symbole D: 1D = 3,336.10 ^{30} C.m.

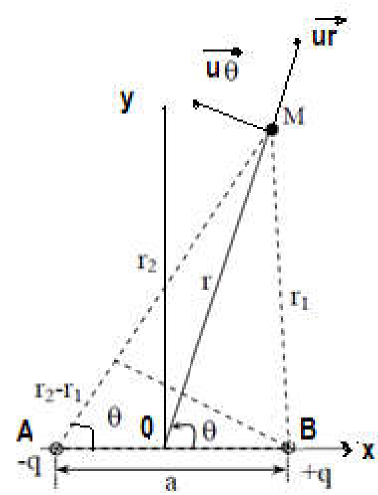
On peut aussi noter qu'un dipôle électrostatique est la limite d'un ensemble de deux charges ponctuelles *q* et *q* placées en *N* et *P* tel que la distance *NP* tend vers zéro tandis que le moment dipolaire *p* = *q.NP* reste constant et fini.

2. Calcul Potentiel et Champ créés par un dipôle à grande distance

a) Invariances et symétries du dipôle

On utilise les coordonnées sphériques pour décrire le problème. La distribution est invariante par rotation autour de l'axe du dipôle, donc le champ électrostatique $\bar{E}(M)$ et le potentiel électrostatique *V*(*M*) ne dépendent pas de $\boldsymbol{\varphi}$.

Pour tenir compte de ces propriétés, on se place en coordonnées sphériques dans un plan méridien ou plan tel que $\boldsymbol{\varphi}$ = constante et on utilise les coordonnées polaires dans ce plan (c'est-à-dire les deux autres coordonnées sphériques $r\ et \boldsymbol{\theta}$).



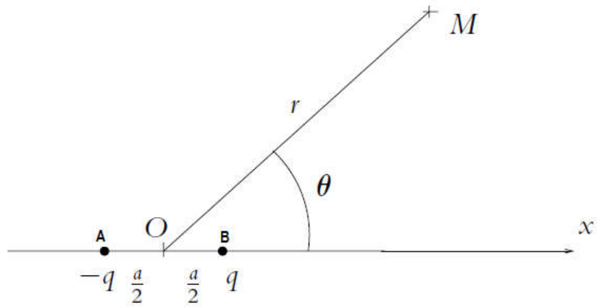
Le potentiel au point M dû au dipôle s'écrit:

$$V_M = \frac{1}{4\boldsymbol{\pi\varepsilon}_0}\frac{q}{AM} + \frac{1}{4\boldsymbol{\pi\varepsilon}_0}\frac{q}{BM}$$

$$V_M = k\left(\frac{q}{r_1} \quad \frac{q}{r_2}\right) = Kq\left(\frac{r_2 \quad r_1}{r_1 r_2}\right)$$

On appelle *O* le milieu du segment [*AB*].

On se place en coordonnées polaires d'origine *O* dans un plan contenant le point *M* et la droite (*AB*) sans perdre en généralité du fait de la symétrie autour de cette droite (Cf. figure suivante pour les notations).



Si la distance r est grande par rapport à a $(OM = r \gg a)$,

On obtient :

$$(MB)^2 = \left(\overline{MO} + \overline{OB}\right)^2 = MO^2 + OB^2 + 2\overline{MO}\,.\overline{OB} = r2 + \frac{a^2}{4} \quad 2r\frac{a}{2}cos\boldsymbol{\theta}$$

$$\frac{1}{MB} = \frac{1}{r}\left(1 \quad \frac{a}{r}cos\,\boldsymbol{\theta} + \frac{a^2}{4r^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Comme le point *M* est « loin » de la distribution, on a $a \ll r$ et on peut effectuer un développement limité de la relation précédente :

$$\frac{1}{MB} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{a}{r}cos\,\boldsymbol{\theta} + 0\left(\frac{a}{r}\right)\right)$$

De la même manière, on obtient :

$$\frac{1}{MA} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{a}{r}cos\,\boldsymbol{\theta} + 0\left(\frac{a}{r}\right)\right)$$

Ce qui permet d'obtenir l'expression du potentiel dans le cadre de l'approximation considérée (au premier ordre en $\frac{a}{r}$) :

$MA \quad r + \frac{a}{2}cos\,\theta \qquad MB \quad r \quad \frac{a}{2}cos\,\theta$

$r_2 \quad r_1 \approx a.cos\theta \;\; et \;\; MB.MA = r_1 r_2 \approx r^2$

Et l'on aura:

$$V_M = kq\frac{1}{r}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{a}{r}cos\,\boldsymbol{\theta} \quad 1 + \frac{1}{2}\frac{a}{r}cos\,\boldsymbol{\theta}\right)$$

$$V_M = kq\frac{a.\cos\theta}{r^2} = \mathrm{Kqa}\frac{\cos\theta}{r^2} \quad \mathrm{Or}\ (p = qa)\ \ \mathrm{et}\ \ p.\cos\theta = \bar{p}.\frac{\overline{OM}}{OM}$$

$$V_M = k\bar{p}.\frac{\overline{OM}}{OM^3}$$

$$V_M = kq\frac{a.\cos\theta}{r^2} = \mathrm{Kqa}\frac{\cos\theta}{r^2} = \mathrm{Kp}\frac{\cos\theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p.\cos\theta}{r^2}$$

Et comme le *moment dipolaire* :

$$p = q\overline{AB} = qa\bar{u}_{AB}$$

On peut noter que *q* est toujours la valeur absolue de la charge et que p est orienté de la charge négative vers la charge positive.

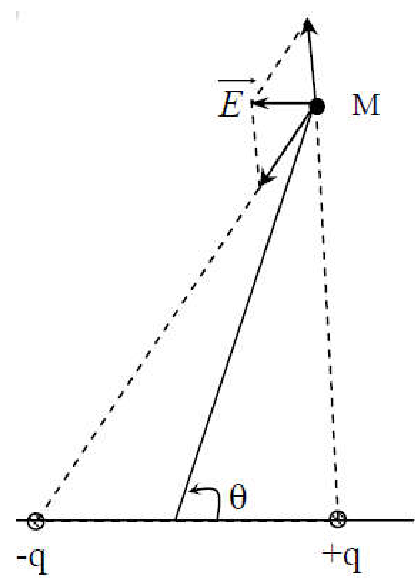
$$V_M = K\frac{p\,.\bar{u}_r}{r^2} = \frac{Kp\cos\theta}{r^2}$$

b) Expression du champ créé

On déduit l'expression du champ électrostatique du potentiel à partir de la relation :

$\bar{E} = \overline{grad}\,V \qquad dV = \bar{E}\,\overline{dl}$

On fera les calculs en coordonnées polaires.



A prendre en considération que le gradient d'une fonction f s'exprime par:

En coordonnées cartésiennes:

$$\overline{grad}\, f = \frac{\partial f}{\partial x}\imath + \frac{\partial f}{\partial y}\jmath + \frac{\partial f}{\partial z}\bar{k}$$

Il vient

$$\bar{E}\begin{cases}E_r\\E_\theta\end{cases} \qquad \overline{dl}\begin{cases}dl_r = dr\\dl_\theta = rd\theta\end{cases}$$

$$dV = \bar{E}\overline{dl} \qquad \begin{cases}dV = (E_r dr + E_\theta r d\theta)\\ dV = \dfrac{\partial V}{\partial r}dr + \dfrac{\partial V}{\partial \theta}d\theta\end{cases}$$

Par identification, on aura:

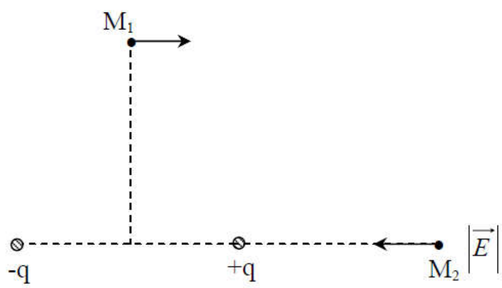
$$\begin{cases} E_r = & \dfrac{\partial V}{\partial r} \\ E_\theta = & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial \theta} \end{cases} \qquad V = kp\frac{cos\theta}{r^2} \qquad \begin{cases} E_r = & \dfrac{\partial V}{\partial r} = \dfrac{2kpcos\theta}{r^3} \\ E_\theta = & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial \theta} = \dfrac{kpsin\theta}{r^3} \end{cases}$$

Donc $\bar{E}\ (M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p\ cos\boldsymbol{\theta}}{r^3}\bar{u}_r + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p\ sin\boldsymbol{\theta}}{r^3}\bar{u}_{\boldsymbol{\theta}}$

Ce champ peut également s'écrire :

$$\bar{E}\ (M) = \frac{1}{4\boldsymbol{\pi\varepsilon}_0}\frac{3\left(p.\overline{OM}\right)\overline{OM} \quad OM^2 p}{OM^5}$$

Positions particulières:



$|\bar{E}| = |\bar{E}_\theta| = \left|\frac{2kp}{r^3}\right| \qquad (\theta = \pi/2)$

$|\bar{E}| = |\bar{E}_\theta| = \left|\frac{2kp}{r^3}\right| \qquad (\theta = 0)$

Il suffit par exemple d'écrire que 3 = 2   1 et d'identifier $p.cos\boldsymbol{\theta}$ au produit scalaire de p par le vecteur unitaire directeur de $\overline{OM}\ et\ p\ cos\boldsymbol{\theta}\ \bar{u}_r$ $p\ sin\boldsymbol{\theta}\bar{u}_{\boldsymbol{\theta}}$ à la projection de p dans la base ($\bar{u}_r\ ,\bar{u}_\theta$).

Le potentiel créé par le dipôle décroît en $\frac{1}{r^2}$ et le champ en $\frac{1}{r^3}$ alors que pour une charge ponctuelle, ils décroissent respectivement en $\frac{1}{r}\ et\ \frac{1}{r^2}$: les effets d'un dipôle se font ressentir à moins grande distance que ceux d'une charge seule.

Champ et potentiel électrostatique s'expriment en fonction du moment dipolaire p et non en fonction de *a* et de *q* séparément : le moment dipolaire est la grandeur caractéristique du dipôle.

Le potentiel et le champ présentent évidemment une symétrie de révolution autour de l'axe support de $\overline{AB}$, pris ici comme axe *Ox*. Comme cos $\theta = x/(x^2 + y^2)^{1/2}$, on trouve :

$$V = \frac{Kpx}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

$$Ex = \frac{\partial V}{\partial x} = Kp\left[\frac{3x^2}{(x^2 + y^2)^{5/2}} \qquad \frac{1}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\right]$$

$$= Kp\frac{3\,cos^2\,\theta \qquad 1}{r^3}$$

$$Ey = \frac{\partial V}{\partial y}$$

$$= Kp\frac{3xy}{(x^2 + y^2)^{5/2}}$$

$$= Kp\frac{3\,sin\,\theta\,cos\,\theta}{r^3}$$

Lorsqu'on s'éloigne du dipôle, le potentiel décroît en $\frac{1}{r^2}$ (comparé à $\frac{1}{r}$ par une charge ponctuelle) et le champ en $\frac{1}{r^3}\left(comparé\text{ à }\frac{1}{r^2}\right)$.

3. Lignes de champ et équipotentielles

a) Lignes de champ

On cherche les lignes tangentes au champ électrostatique en tout point en utilisant la relation : $\bar{E}(M) \quad d\overline{OM} = \bar{0}$

qu'on écrit en coordonnées polaires :

$$\begin{pmatrix} E_r \\ E_\theta \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} dr \\ rd\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

soit : $rE_r d\boldsymbol{\theta} = E_\theta dr$

On obtient :

$$\frac{2pcos\boldsymbol{\theta}}{4\boldsymbol{\pi\varepsilon}_0 r^2}d\theta = \frac{psin\boldsymbol{\theta}}{4\boldsymbol{\pi\varepsilon}_0 r^3}dr$$

En séparant les variables, on en déduit :

$$\frac{dr}{r} = 2\frac{cos\boldsymbol{\theta}d\boldsymbol{\theta}}{sin\boldsymbol{\theta}} = 2\frac{d(sin\,\boldsymbol{\theta})}{sin\,\boldsymbol{\theta}}$$

Soit après intégration :

$$\ln r = 2\, ln|sin\boldsymbol{\theta}| + C$$

ou en prenant l'exponentielle :

$r\ = \boldsymbol{\lambda} sin^2\, \boldsymbol{\theta}$ $\quad où \quad$ $\boldsymbol{\lambda}$ est une constante.

D'où l'allure des lignes de champ :

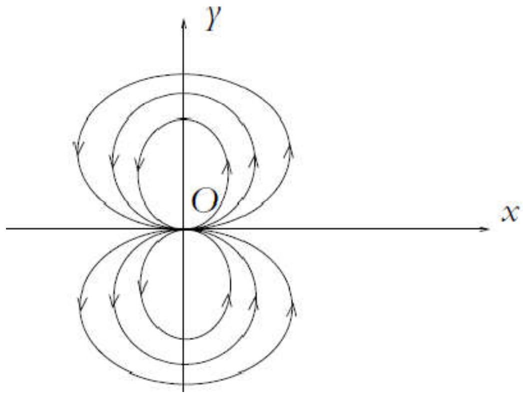
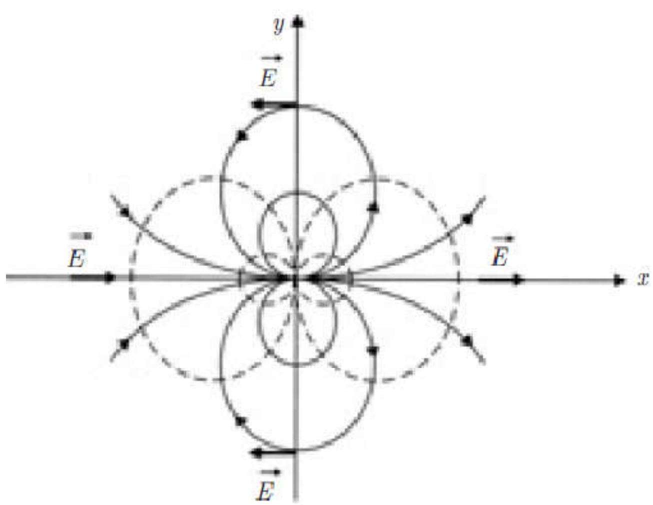


Figure 46.3 Lignes de champ du dipôle électrostatique.

La figure ci-après indique l'allure des lignes de champs (en trait plein) et des lignes équipotentielles (en pointillés) dans le plan *xOy*.

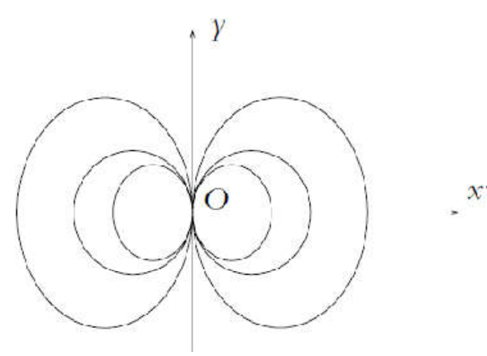


b) Équipotentielles

Elles sont définies par l'ensemble des points ayant le même potentiel soit

$$V = V_0 = \frac{p\ cos\boldsymbol{\theta}}{4\boldsymbol{\pi\varepsilon}_0 r^2}\ \ donc\ \ r = \boldsymbol{\mu}\sqrt{|\ cos\boldsymbol{\theta}|}$$

où $\boldsymbol{\mu}$ est une constante.



D'où l'allure des équipotentielles :

Figure 46.4 Équipotentielles du dipôle électrostatique.

- **Tracé du diagramme électrique :** On peut superposer les deux tracés précédents sur un même diagramme électrique.

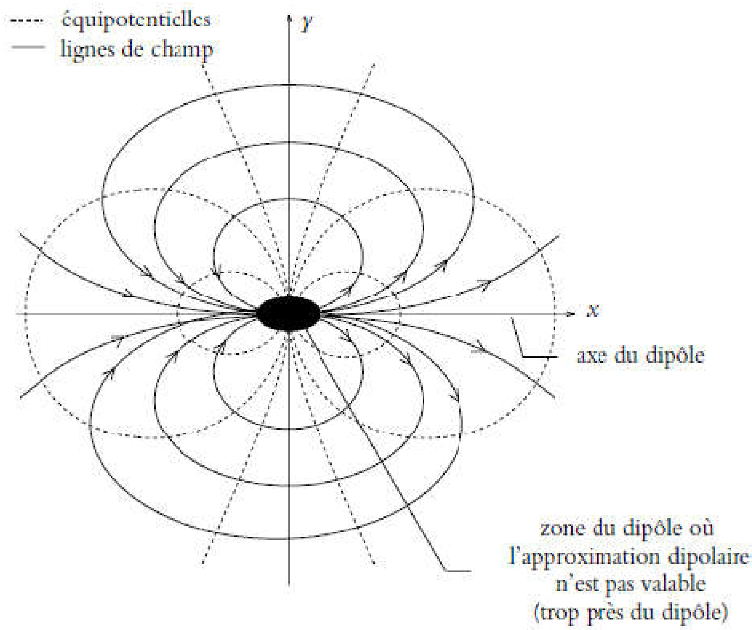


Figure 46.5 *Diagramme électrique du dipôle électrostatique.*

Remarques : On peut formuler les remarques suivantes :

• Lignes de champ et équipotentielles sont en tout point de l'espace orthogonales.

• La zone où se trouve le dipôle est une zone où les calculs précédents ne sont pas valables, ils ne donnent pas l'allure des lignes de champ ou des équipotentielles : on n'est pas suffisamment « loin » de la distribution. Cette zone a été noircie sur la représentation.

4. Action d'un champ extérieur sur un dipôle

4.1 Cas d'un champ uniforme

a) Cas d'un champ uniforme : On s'intéresse tout d'abord à l'action subie par un dipôle dans un champ électrostatique extérieur uniforme en déterminant la force et le moment qu'il subit.

a) Force exercée sur un dipôle par un champ électrostatique extérieur uniforme

La force qui s'exerce sur un dipôle électrostatique est la somme des forces qui s'exercent sur chacune des deux charges. On peut noter que la force d'interaction entre les deux charges constituant le dipôle donne une contribution nulle par le principe des actions réciproques.

Soit *θ* l'angle de *AB* (support du moment dipolaire p) avec l'axe $\overline{Ox}$ pris dans la direction du champ appliqué $\overline{E}$.

• *Force résultante sur le dipôle*

$$F \;= F_P + F_N = qE_P e_x \quad qE_N e_x = \bar{0}$$

le champ est uniforme, $\bar{E}_P = \overline{E_N} \quad et \quad F \;= F_P + F_N = qE_P e_x \quad qE_N e_x = \bar{0}$

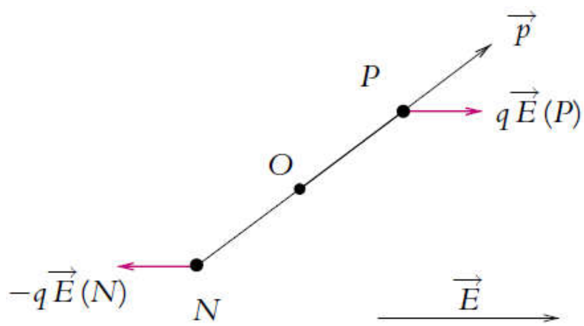


Figure 46.6 *Action d'un champ électrostatique uniforme sur un dipôle.*

$F \;= \bar{0}$ la force résultante est nulle.

Un champ électrostatique uniforme n'exerce pas de force sur un dipôle électrostatique.

• *Moment résultant* :

$$\overline{\quad}_0 = \overline{OP} \;\; q\bar{E}(P) \quad \overline{ON} \;\; q\bar{E}(N)$$

$$\overline{\quad}_0 = \frac{\bar{a}}{2} \wedge \bar{F}_P \quad \frac{\bar{a}}{2} \wedge \bar{F}_N = \frac{\bar{a}}{2} \wedge q\bar{E} \; + \frac{\bar{a}}{2} \wedge q\bar{E} = a \; \wedge q\bar{E} = +p \wedge \bar{E}$$

$$= \quad pE \sin\theta e_z$$

Ce moment tend à aligner le dipôle parallèlement au champ $\bar{E}$ $(\theta \;=\; 0)$.

Dans le cas d'une molécule assimilée à un dipôle, le point *P* représente le barycentre des charges négatives et le point *N* le barycentre des charges positives. Le moment dipolaire moléculaire aura tendance à s'aligner avec le champ $\bar{E}$. On dit que la molécule (ou la substance) se polarise.

On notera que le moment obtenu est indépendant du point où on le calcule. On le notera $\bar{\boldsymbol{\Gamma}}$

b) Analyse qualitative de l'action d'un champ électrostatique extérieur uniforme sur un dipôle

L'action d'un champ électrostatique extérieur uniforme sur un dipôle se réduit à un couple de moment : $\bar{\boldsymbol{\Gamma}} = p\Lambda\,\bar{E}$

En notant $\boldsymbol{\theta}$ l'angle entre $p\ et\ \bar{E}\ et\ \bar{k}$ un vecteur unitaire perpendiculaire à $p\ \ et\ \bar{E}$, le couple s'écrit : $\bar{\boldsymbol{\Gamma}} \ = \ pE\ sin\ \boldsymbol{\theta}\bar{k}$

D'après le théorème du moment cinétique, on aura un état d'équilibre si le moment des forces est nul donc si sin $\boldsymbol{\theta} = \ 0$, à savoir si

$$\boldsymbol{\theta} = 0 \quad ou \quad \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\pi}$$

Cela correspond à des positions du dipôle parallèle ou antiparallèle au champ électrostatique.

Pour discuter de la stabilité de ces positions d'équilibre, on écarte légèrement le dipôle de sa position d'équilibre et on analyse le type de mouvement que le moment du couple tend à créer.

• Dipôle parallèle :

Les forces tendent à ramener le dipôle dans sa position d'équilibre donc l'équilibre des dipôles parallèles au champ est stable.

• Dipôle antiparallèle:

Les forces tendent à écarter le dipôle de sa position d'équilibre donc l'équilibre des dipôles antiparallèles au champ est instable.

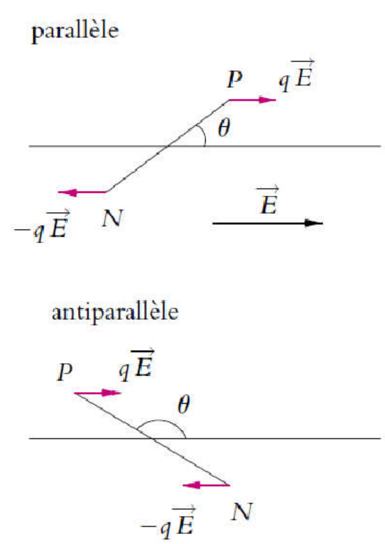


Figure 46.7 Etude de la stabilité des positions d'équilibre d'un dipôle dans un champ électrostatique extérieur.

Un champ électrostatique uniforme tend donc à orienter les dipôles électrostatiques suivant les lignes de champ.

À l'échelle du dipôle, tout champ est en première approximation uniforme : l'effet principal d'un champ extérieur sur un dipôle est son orientation suivant les lignes de champ.

b) Cas d'un champ non uniforme : Aucune expression établie dans ce paragraphe n'est exigible dans le cadre du programme ; seule l'analyse qualitative du phénomène est à retenir. En cas de besoin, il faudra démontrer toutes les relations qui pourront être obtenues ici.

c) Force exercée sur un dipôle par un champ électrostatique extérieur non uniforme

Dans ce cas, les forces $F_B\ et\ F_A$ ne sont plus égales et opposées. Il en résulte une force qui va déplacer le dipôle dans son ensemble. On aura donc un mouvement de translation de centre de masse *O* du dipôle, en plus du mouvement de rotation autour de *O*.

La force résultante est liée à l'énergie potentielle par :

$$F = \quad \overline{grad}E_p \quad On\ aura\ donc:\ F = \quad \overline{grad}\,(p\,.\bar{E})$$

La force s'exprime aussi par : $F = q\bar{E}(P) \quad q\bar{E}\,(N) = q\big(\bar{E}\,(P) \quad \bar{E}(N)\big)$

Le champ extérieur n'étant pas uniforme, cette force n'est pas nulle : il faut tenir compte des variations du champ entre *P* et *N*. Or la définition d'un dipôle impose à la distance *PN* d'être faible devant les distances caractéristiques du problème donc en particulier devant la distance caractéristique des variations du champ électrostatique extérieur auquel le dipôle est soumis. Par conséquent, on peut effectuer un développement limité du champ électrostatique en *P* et en *N*.

On va se placer en coordonnées cartésiennes pour effectuer la démonstration. Le résultat est cependant tout à fait général et indépendant du système de coordonnées dans lequel on se place. On cherchera donc à obtenir une expression intrinsèque.

Soient (*x, y, z*) les coordonnées du milieu de [*PN*] et $(\mathbf{\Delta}x, \mathbf{\Delta}y, \mathbf{\Delta}z)$ les composantes de

$\overline{NP}$. Les coordonnées des points *P* et *N* sont donc respectivement :

$$\left(x + \frac{\mathbf{\Delta}x}{2}, y + \frac{\mathbf{\Delta}y}{2}, z + \frac{\mathbf{\Delta}z}{2}\right) \quad et \quad \left(x \quad \frac{\mathbf{\Delta}x}{2}, y \quad \frac{\mathbf{\Delta}y}{2}, z \quad \frac{\mathbf{\Delta}z}{2}\right)$$

On en déduit pour la composante suivant *Ox* de la force :

$F_x = q\left(E_x\left(x + \frac{\mathbf{\Delta}x}{2}, y + \frac{\mathbf{\Delta}y}{2}, z + \frac{\mathbf{\Delta}z}{2}\right) \quad E_x\left(x \quad \frac{\mathbf{\Delta}x}{2}, y \quad \frac{\mathbf{\Delta}y}{2}, z \quad \frac{\mathbf{\Delta}z}{2}\right)\right)$Le développement limité au premier ordre de la composante sur *Ox* du champ donne :

$$F_x = q\left(E_x(x,y,z) + \frac{\mathbf{\Delta}x}{2}\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\mathbf{\Delta}y}{2}\frac{\partial E_x}{\partial y} + \frac{\mathbf{\Delta}z}{2}\frac{\partial E_x}{\partial z} \quad E_x(x,y,z) + \frac{\mathbf{\Delta}x}{2}\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\mathbf{\Delta}y}{2}\frac{\partial E_x}{\partial y} + \frac{\mathbf{\Delta}z}{2}\frac{\partial E_x}{\partial z}\right)$$

$$= q\left(\mathbf{\Delta}x\frac{\partial E_x}{\partial x} + \mathbf{\Delta}y\frac{\partial E_x}{\partial y} + \mathbf{\Delta}z\frac{\partial E_x}{\partial z}\right)$$

$$= p.\left(\overline{grad}E_x\right)$$

Par un raisonnement analogue, on obtient :

$$F_y = \overline{p}\,.\,\overline{grad}E_y \quad et\ F_z = p\,.\,\overline{grad}E_z$$

On note

$F = \left(p.\overline{grad}\right)\bar{E}$, ce qui signifie que $F_x = p\overline{grad}E_x$

$F_y = p.\overline{grad}E_y \ \ et\ F_z = p.\overline{grad}E_z$ en **coordonnées cartésiennes**.

L’expression de l’opérateur $\overline{p}.\overline{grad}$ est beaucoup plus compliquée dans les autres systèmes de coordonnées, elle sera donnée si besoin est.

Cas d’un dipôle rigide

Un dipôle est dit *rigide* si la distance entre les charges positive et négative constituant le dipôle est constante en toutes circonstances.

Dans ce cas, on peut « rentrer » les termes $q\mathbf{\Delta}x, q\mathbf{\Delta}y\ et\ q\mathbf{\Delta}z$ dans la dérivée partielle.

On obtient ainsi l'expression : $F = \overline{grad}(p\,.\bar{E})$

Cas d'un dipôle non rigide

Pour un dipôle rigide en champ non uniforme, on a obtenu pour la composante *Fx* de la force : $F_x = q\left(\boldsymbol{\Delta}x\frac{\partial E_x}{\partial x} + \boldsymbol{\Delta}y\frac{\partial E_x}{\partial y} + \boldsymbol{\Delta}z\frac{\partial E_x}{\partial z}\right)$

Le fait que le dipôle ne soit plus rigide implique un mouvement relatif des points *N* et *P*. Cela aura pour conséquence de modifier les valeurs de $\boldsymbol{\Delta}x, \boldsymbol{\Delta}y\ et\ \boldsymbol{\Delta}z$, mais ne changera pas le résultat final : $F = \left(\overline{p(\bar{E}\,)}.\overline{grad}\right)\bar{E}$

On doit simplement tenir compte du fait que le dipôle dépend du champ électrique.