Exercice 1 :

Donner tous les mots de tailles 0, 1, 2, 3, et 4 des langages réguliers suivants :
$(a + ba)^*$; $a(aa + b(ab)^*a)^*a$. Pour cela, vous pouvez faire un arbre de possibilité pour chacun des langages.

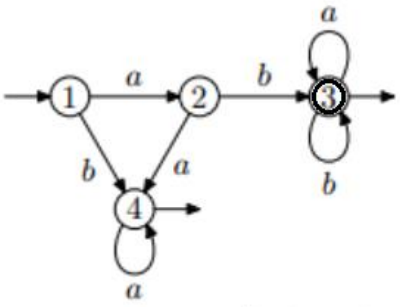
Solution 1 :

Mots de longueurs 0 : epsilon ; Mots de longueurs 1 : a ; Mots de longueurs 2 : aa, ba ; Mots de longueurs 3 : aaa, aba, baa ; Mots de longueurs 4 : aaaa, aaba, abaa, baba, baaa.

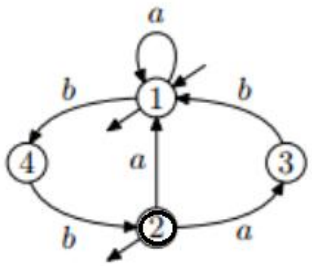
Mots de longueurs 0 : aucun ; Mots de longueurs 1 : aucun ; Mots de longueurs 2 : aa ; Mots de longueurs 3 : aucun ; Mots de longueurs 4 : aaaa, abaa.

Exercice 2

Donner tous les mots de longueur 0, 1, 2, 3 et 4 reconnus par les automates suivants. Il est possible de répondre à cette question de manière systématique en utilisant les matrices. Pour cela, on représente l'automate (que l'on peut voir comme un graphe) par la matrice d'adjacence. Ainsi, le coefficient d'indice i, j de la matrice M^k correspond aux mots de longueur k reconnus par l'automate, si l'état initial était l'état i et l'état final, l'état j. Si l'on souhaite obtenir les mots de longueur k reconnus par notre automate, il suffit de multiplier la matrice par elle-même.



Automate $\mathcal{A}_1$



Automate $\mathcal{A}_2$

Solution 2 :

Pour l'automate A1, il suffit d'évaluer (1,3) et (1,4) des matrices suivantes :

$$M^0 = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & b \\ 0 & 0 & b & a \\ 0 & 0 & a+b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \quad M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ab & aa+ba \\ 0 & 0 & b(a+b) & a^2 \\ 0 & 0 & (a+b)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ab(a+b) & a^3+ba^2 \\ 0 & 0 & b(a+b)^2 & a^3 \\ 0 & 0 & (a+b)^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^3 \end{pmatrix} \qquad M^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ab(a+b)^2 & a^4+ba^3 \\ 0 & 0 & b(a+b)^3 & a^4 \\ 0 & 0 & (a+b)^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^4 \end{pmatrix}$$

Mots de longueurs 0 : aucun ; Mots de longueurs 1 : b ; Mots de longueurs 2 : ab + aa + ba ; Mots de longueurs 3 : aba + abb + aaa + baa ; Mots de longueurs 4 : abaa + abab + abba + abbb + aaaa + baaa.

Pour l'automate A1, il suffit d'évaluer (1,1) et (1,2) des matrices suivantes :

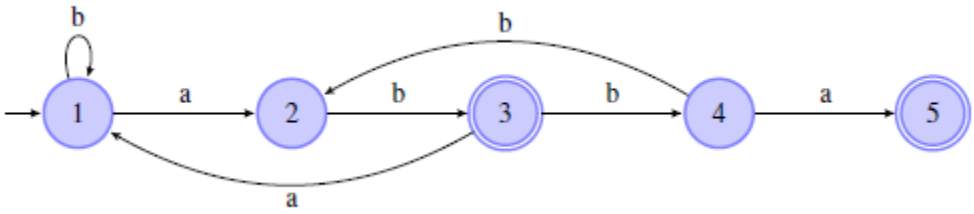
$$M^0 = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ a & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M^2 = \begin{pmatrix} a^2 & b^2 & 0 & ab \\ a^2+ab & 0 & 0 & ab \\ ba & 0 & 0 & b^2 \\ ba & 0 & ba & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^3 = \begin{pmatrix} a^3+b^2a & ab^2 & b^2a & a^2b \\ a^3+aba & ab^2 & 0 & a^2b+ab^2 \\ ba^2 & b^3 & 0 & bab \\ b(a^2+ab) & 0 & 0 & bab \end{pmatrix} \quad M^4 = \begin{pmatrix} a(a^3+b^2a) & b^2(a^2+ab)+a^2b^2 & \dots \\ & & \end{pmatrix}$$

Mots de longueur 0 : M0 1,1 + M0 1,2 = ; Mots de longueur 1 : M1 1,1 + M1 1,2 = a ; Mots de longueur 2 : M2 1,1 + M2 1,2 = aa + bb ; Mots de longueur 3 : M3 1,1 + M3 1,2 = aaa + bba + abb ; Mots de longueur 4 : M4 1,1 + M4 1,2 = aaaa + abba + aabb + bbaa + bbab

Exercice 3 :

Soit l'automate M suivant :

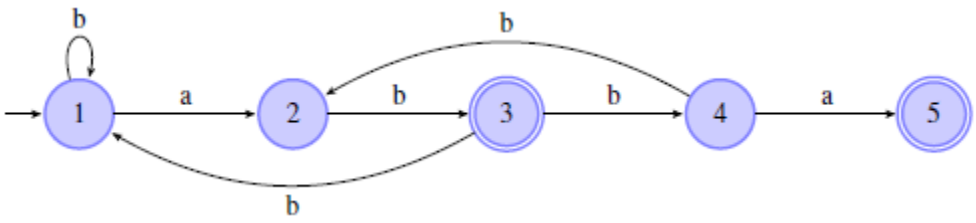


Combien d'états possède l'automate M ? Donner l'ensemble des états finaux, et l'ensemble des états initiaux. L'automate est-il déterministe ? Dans quel état se trouve l'automate après avoir lu

le mot bbabbb ? Ce mot est-il reconnu par l'automate / accepté par l'automate ? Mêmes questions pour le mot babaabba.

Rendre l'automate M complet. Le mot baa est-il reconnu par cet automate ? accepté par cet automate ?

Soit l'automate N suivant :



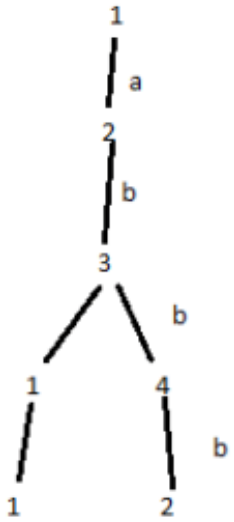
Dans quels états peut être l'automate N après avoir lu babba ? Ce mot est-il accepté par cet automate ? Même question pour le mot abbb.

Solution 3 :

Les premières questions demandent une description formelle de l'automate M. Lorsqu'on construit la table de transition, on remarque que l'automate M et déterministe contrairement à l'automate N. Pour compléter M, il faut rajouter l'état poubelle, tous les mots sont reconnus mais le langage accepté reste le même que non complet.

Pour lire le premier mot : $1 \vdash b1 \vdash bb1 \vdash bba2 \vdash bbab3 \vdash bbabb4 \vdash bbabbb2$ or 2 n'est pas un état final donc il est reconnu mais pas accepté. Le principe de dérivation est le même si l'automate est déterministe, sinon il faut créer un arbre de dérivation.

Pour lire le dernier mot :



On remarque que l'automate peut lire le mot abbb de deux façons, lorsqu'un mot ne peut plus être lu dans une branche on note # et la branche se termine.

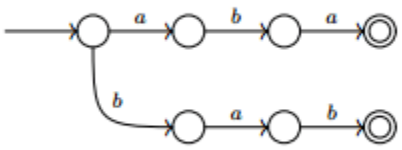
Exercice 4 :

Pour chacun des langages ci-dessous, expliciter le langage et dessiner un automate qui le reconnait à l'aide d'une méthode de construction.

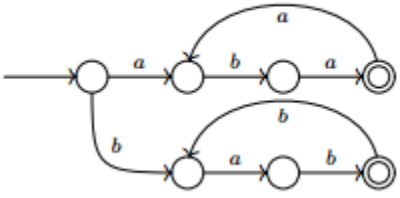
- L est le langage dénoté par aba + bab.
- L est le langage dénoté par $(aba)^*+ (bab)^*$.
- L = {u ∈{a, b}* tel que u contient le facteur bbb}.
- L = {u ∈{a, b}* tel que u ne contient pas le facteur bbb

Solution 4 :

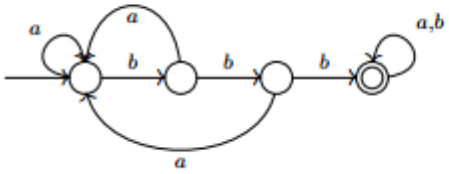
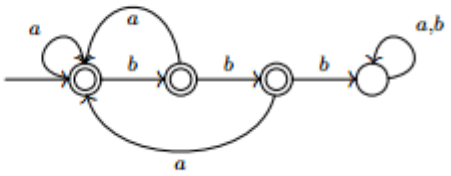
i) $aba + bab$:



ii) $(aba)^* + (bab)^*$:



iii) $(a+b)^*bbb(a+b)^*$:



iv) Complémentaire de $(a+b)^*bbb(a+b)^*$: