Chapitre 3: Equation différentielle du premier Ordre

27 avril 2022

1 Equation Differentielle

Définition 1.1 *On appelle équation différentielle, une équation avec une fonction inconnue $y(x)$ de la variable rélles x et une ou plusieurs de ses dérivées $y', y'', ...$*

Exemple 1.2 $y' - 2xy = 0$.

Ainsi, de la faon générale, l'équation $F(x, y, y', y'', ...) = 0$ est une équation différentielle où F une fonction réelle de plusieurs variables.
Toute fonction $y(x)$ vérifiant $F(x, y, y', y'', ...) = 0$ est appelée solution de l'équation différentielle.

Définition 1.3 *1-Une équation différentielle d'ordre n est linéaire si elle est de la forme :*

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + a_2(x)y'' + ... + a_n(x)y^{(n)} = g(x)$$

où les a_i, pour $i = 0, 1, .., n$ et g sont des fonctions réelles continues sur un intervalle $I \in R$.
2- U ne équation difféntielle linéaire d'ordre n, est dite homogène, où sans second membre si la fonction g est nulle :

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + a_2(x)y'' + ... + a_n(x)y^{(n)} = 0.$$

3-Une équation différentielle linéaire à coefficients constants si :

$$a_0y + a_1y' + a_2y'' + ... + a_ny^{(n)} = g(x)$$

où les a_i, pour $i = 0, 1, .., n$ et g sont des constantes et g est une fonction réelles continue.

2 Equation différentielle du premier ordre

Définition 2.1 *Une équation différentielle du premier ordre est de la forme : $y' = f(x, y)$*
où f une fonction continue par rapport à x sur un intervalle I de R.

2.2 Quelques méthodes de résolution :

2.2.1 Equation différentielle à variable séparables :

Une équation différentielle est dit à variables séparables si elle est de la forme $g(y)y' = f(x)$ où f et g sont des fonctions continue sur des intervalles I et J respectivement
Sachant $y' = \frac{dy}{dx}$, alrors $g(y)dy = f(x)dx$.
En intégrant, on obtient $\int g(y)dy = \int f(x)dx \Rightarrow G(y) = F(x) + c$ où G, F sont des primitives de g et f respectivement.

Exemple 2.3 $y' = xy$, *alors* $\frac{y'}{y} = x \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int xdx \Rightarrow \ln|x| = \frac{x^2}{2} + c, c \in R$
$|y| = e^{\frac{x^2}{2}+c} \Rightarrow |y| = ke^{\frac{x^2}{2}}, c \in R$

2.3.1 Equations différentielle linéaires du premier ordre

Une équation différentielle du premier ordre est une équation de la forme :

$$y' + a(x)y = f(x) \tag{1}$$

où a et f sont deux fonctions continues. L'équation 1 est dite aussi nonhomogéne.
Méthode de résoltion :
La solution générale de 1 est donnée par $y_g = y_h + y_p$ avec y_h est la solution de lâéquation homogéne et yp et la solutions particulière. On commence par l'équation différentielle homogène

$$y' + a(x)y = 0....(h)$$

si $y \neq 0$, alors on a : $\frac{dy}{dx} = -a(x)y \Rightarrow \frac{dy}{y} = -a(x)dx \Rightarrow \ln|y| = -A(x) + c$.
où $c \in R$ et A est la primitive de a sur l'intervalle I.
Ainsi : $y(x) = ke^{-A(x)}$, où $k = \pm e^c$
Maintenant, nous utilisons la méthode de la variation de la constante pour trouver la solution particulière
Ou $y = ke^{-\int a(x)dx}$, la méthode consiste *à* faire varier la constante k c'est *à* la fonction *à* trouver $k(x)$ avec $y_p = k(x)e^{-\int a(x)dx}$, on remplaant dans 1 on trouve

$$k'(x)e^{-A(x)} - k(x)a(x)e^{-A(x)} + a(x)k(x)e^{-A(x)} = f(x)$$
$$\Rightarrow k'(x)e^{-A(x)} = f(x)$$
$$\Rightarrow k'(x) = e^{A(x)}f(x)$$
$$\Rightarrow k(x) = \int f(x)e^{A(x)}dx$$

Alors, $y_p = (\int f(x)e^{A(x)}dx)e^{-A(x)}$

Exemple 2.4 *Résoudre*

$$y' - 4y = 3 \tag{2}$$

on commence par résoudre l'équation homogène

$$(Eh) : y' - 4y = 0$$

$y_h = ke^{-\int a(x)dx} \Rightarrow y_h = ke^{\int 4dx} \Rightarrow y_h = ke^{4x}, k = \pm e^c$.
On cherche ensuite une solution particulière en utilisant la méthode de la variation de constante

on pose $y_p = k(x)e^{4x} \Rightarrow y'_p = k'(x)e^{4x} + 4k(x)e^{4x}$ *et en remplaant dans* 2, *on trouve :*

$$k'(x)e^{4x}+4k(x)e^{4x}-4k(x)e^{4x} = 3 \Rightarrow k'(x)e^{4x} = 3 \Rightarrow k'(x) = 3e^{-4x} \Rightarrow k(x) = \frac{-3}{4}e^{-4x}.$$

on a $y_p = \frac{-3}{4}$, *alors*

$$y_g = ke^{4x} - \frac{3}{4}$$

2.4.1 Equation de Bernoulli :

Soit f, g, deux fonctions continues sur I. Une équation de la forme

$$y' + f(x)y + g(x)y^{\alpha} = 0, \alpha \in R$$

est dite une équation de Bernoulli.
Pour résoudre l'équation de Bernoulli, on fait un changement de variable qui permet de la transformation en une équation linéaire.
On dévise par $y^{\alpha}(y \neq 0)$ on obtient :

$$\frac{y'}{y^{\alpha}} + \frac{f(x)y}{y^{\alpha}} + g(x) = 0$$

on pose $z = y^{1-\alpha}$ alors : $z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$. Ainsi, l'équation devient

$$\frac{z'}{1-\alpha} + f(x)z + g(x) = 0$$

Exemple 2.5 *: Résoudre*

$$y' + xy + xy^4 = 0 \tag{3}$$

on divise 3 *par* y^4, *on obtient*

$$y'y^{-4} + xy^{-3} + x = 0$$

En posant $z = y^{-3}$, *on obtient* $z' = -3y'y^{-4}$
Ainsi,

$$z' - 3xz = 3x \tag{4}$$

On commence par trouver la solution de l'équation homogène $z' - 3xz = 0 \Rightarrow z_h = ke^{\frac{3x^2}{2}}$.
Maintenant, pour l'équation nonhomogène :

$$z' - 3xz = 3x$$

$$ona : z_p = k(x)e^{\frac{3x^2}{2}} \Rightarrow z'_p = k'(x)e^{\frac{3x^2}{2}} + 3xk(x)e^{\frac{3x^2}{2}}$$

on remplaant dans 4 *on a*

$$k'(x)e^{\frac{3x^2}{2}} + 3xk(x)e^{\frac{3x^2}{2}} - 3xk(x)e^{\frac{3x^2}{2}} = 3x \Rightarrow k'(x) = 3xe^{\frac{-3x^2}{2}}$$

en intégrant, $k(x) = -e^{\frac{3x^2}{2}} \Rightarrow z_p = -1$ *Alors* $z_g = ke^{\frac{3x^2}{2}} - 1$
puisque $z = \frac{1}{y^3} \Rightarrow y = \left(\frac{1}{ke^{\frac{3x^2}{2}}-1}\right)^{\frac{1}{3}}$.

Fiche exercices (avec corrigés) - Equations différentielles

Exercice 1

Donner l'ensemble des solutions des équations différentielles suivantes :

1. $y'(x) - 4\,y(x) = 3$ *pour* $x \in \mathbb{R}$
2. $y'(x) + y(x) = 2\,\mathrm{e}^x$ *pour* $x \in \mathbb{R}$
3. $y'(x) - \tan(x)\,y(x) = \sin(x)$ *pour* $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$
4. $y'(x) = \dfrac{y(x)}{x} + x$ *pour* $x \in \mathbb{R}_+^*$
5. $(x^2+1)\,y'(x) + x\,y(x) = 0$ *pour* $x \in \mathbb{R}$

Réponse :

1. L'équation est $y'(x) - 4\,y(x) = 3$: $a(x) = -4$ et $f(x) = 3$.

   a) L'équation homogène est $y'(x) - 4\,y(x) = 0$.
   Ici $a(x) = -4$ donc une primitive est $A(x) = -4\,x$.
   La solution générale de l'équation homogène est $y(x) = C\,\mathrm{e}^{-A(x)} = C\,\mathrm{e}^{4\,x}$.

   b) Une solution particulière vérifie $y_0'(x) - 4\,y_0(x) = 3$.

   Cette solution s'écrit $y_0(x) = g(x)\,\mathrm{e}^{-A(x)}$ avec $g(x)$ primitive de $f(x)\,\mathrm{e}^{A(x)} = 3\,\mathrm{e}^{-4\,x}$

   $$\Rightarrow g(x) = -\frac{3}{4}\,\mathrm{e}^{-4\,x} \Rightarrow y_0(x) = -\frac{3}{4}\,\mathrm{e}^{-4\,x}\,\mathrm{e}^{4\,x} = -\frac{3}{4}$$

   c) La solution générale est $\boxed{y(x) = C\mathrm{e}^{4x} - \frac{3}{4}}$

2. L'équation est $y'(x) + y(x) = 2\,\mathrm{e}^x$: $a(x) = 1$ et $f(x) = 2\,\mathrm{e}^x$.

   a) L'équation homogène est $y'(x) + y(x) = 0$.
   Ici $a(x) = 1$ donc une primitive est $A(x) = x$.
   La solution générale de l'équation homogène est $y(x) = C\,\mathrm{e}^{-A(x)} = C\,\mathrm{e}^{-x}$.

   b) Une solution particulière vérifie $y_0'(x) + y_0(x) = 2\,\mathrm{e}^x$.

   Cette solution s'écrit $y_0(x) = g(x)\,\mathrm{e}^{-A(x)}$ avec $g(x)$ primitive de $f(x)\,\mathrm{e}^{A(x)} = 2\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^x = 2\,\mathrm{e}^{2\,x}$

   $$\Rightarrow g(x) = \mathrm{e}^{2\,x} \Rightarrow y_0(x) = \mathrm{e}^{2\,x}\,\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^x$$

   c) La solution générale est $\boxed{y(x) = C\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^x}$

3. L'équation est $y'(x) - \tan(x)\,y(x) = \sin(x)$.

   a) L'équation homogène est $y'(x) - \tan(x)\,y(x) = 0$: $a(x) = -\tan(x)$ et $f(x) = \sin(x)$.

Ici $a(x) = -\tan(x) = -\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ donc une primitive est $A(x) = \ln|\cos(x)| = \ln(\cos(x))$ car on est sur l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$ et donc $\cos(x) > 0$.
La solution générale de l'équation homogène est

$$y(x) = C\mathrm{e}^{-A(x)} = C\mathrm{e}^{-\ln(\cos(x))} = \frac{C}{\mathrm{e}^{\ln(\cos(x))}} = \frac{C}{\cos(x)}$$

b) Une solution particulière vérifie $y_0'(x) - \tan(x)y_0(x) = \sin(x)$.
Cette solution s'écrit $y_0(x) = g(x)\mathrm{e}^{-A(x)}$ avec
$g(x)$ primitive de $\sin(x)\mathrm{e}^{A(x)} = \sin(x)\cos(x)$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{1}{2}\sin^2(x) \Rightarrow y_0(x) = \frac{g(x)}{\cos(x)} = \frac{\sin^2(x)}{2\cos(x)}$$

c) La solution générale est $\boxed{y(x) = \dfrac{C}{\cos(x)} + \dfrac{\sin^2(x)}{2\cos(x)} = \dfrac{\sin^2(x) + C_1}{2\cos(x)}}$

4. L'équation est $y'(x) - \dfrac{y(x)}{x} = x$: $a(x) = -\dfrac{1}{x}$ et $f(x) = x$.

   a) L'équation homogène est $y'(x) - \dfrac{y(x)}{x} = 0$.
   Ici $a(x) = -\dfrac{1}{x}$ donc une primitive est $A(x) = -\ln|x| = -\ln(x)$ car on est sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
   La solution générale de l'équation homogène est

   $$y(x) = C\,\mathrm{e}^{-A(x)} = C\,\mathrm{e}^{\ln(x)} = C\,x$$

   b) Une solution particulière vérifie $y_0'(x) - \dfrac{y_0(x)}{x} = x$.
   Cette solution s'écrit $y_0(x) = g(x)\mathrm{e}^{-A(x)}$ avec $g(x)$ primitive de $x\mathrm{e}^{A(x)} = \dfrac{x}{x} = 1$

   $$\Rightarrow g(x) = x \Rightarrow y_0(x) = x\,\mathrm{e}^{\ln(x)} = x\,x = x^2$$

   c) La solution générale est $\boxed{y(x) = C\,x + x^2}$

5. L'équation est $y'(x) - \dfrac{x}{x^2+1}y(x) = 0$ qui est une équation homogène.
   Ici $a(x) = -\dfrac{x}{x^2+1}$ donc une primitive est $A(x) = -\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)$.
   La solution générale de l'équation (homogène) est

   $$y(x) = C\,\mathrm{e}^{-A(x)} = C\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\ln(x^2+1)} = C\,(x^2+1)^{\frac{1}{2}} = C\sqrt{x^2+1}$$

Exercice 2

Résoudre les problèmes de Cauchy suivants :

1. $y'(x) - 2\,y(x) = 4$, $y(0) = 0$, $x \in \mathbb{R}$
2. $y'(x) = \dfrac{y(x)+1}{x}$, $y(1) = 0$, $x > 0$
3. $y'(x) - 2\,y(x) = 2\,x$, $y(0) = \dfrac{1}{4}$, $x \in \mathbb{R}$
4. $x^2 y'(x) - (2x-1)y(x) = x^2$, $y(1) = 1$, $x > 0$
5. $(x+1)y'(x) - xy(x) + 1 = 0$, $y(0) = 2$, $x > -1$

Réponse :

1. L'équation est $y'(x) - 2\,y(x) = 1$: $a(x) = -2$ et $f(x) = 4$.

   a) L'équation homogène est $y'(x) - 2\,y(x) = 0$.
   Ici $a(x) = -2$ donc une primitive est $A(x) = -2\,x$.
   La solution générale de l'équation homogène est

$$y(x) = C\,\mathrm{e}^{-A(x)} = C\,\mathrm{e}^{2\,x}$$

   b) Une solution particulière vérifie $y_0'(x) - 2\,y_0(x) = 1$.
   Cette solution s'écrit $y_0(x) = g(x)\mathrm{e}^{-A(x)}$ avec $g(x)$ primitive de $f(x)\mathrm{e}^{A(x)} = 4\,\mathrm{e}^{-2\,x}$

$$\Rightarrow g(x) = -2\,\mathrm{e}^{-2\,x}$$

$$\Rightarrow y_0(x) = -2\,\mathrm{e}^{-2\,x}\,\mathrm{e}^{2\,x} = -2$$

   c) La solution générale est $y(x) = C\,\mathrm{e}^{2\,x} - 2$

   d) $y(0) = 0 \iff C - 2 = 0 \iff C = 2$.
   La solution est donc $\boxed{y(x) = 2\,\mathrm{e}^{2\,x} - 2}$

2. L'équation est $y'(x) - \dfrac{y(x)}{x} = \dfrac{1}{x}$: $a(x) = -\dfrac{1}{x}$ et $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

   a) L'équation homogène est $y'(x) - \dfrac{y(x)}{x} = 0$.
   Ici $a(x) = -\dfrac{1}{x}$ donc une primitive est $A(x) = -\ln|x| = -\ln(x)$ car on est sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
   La solution générale de l'équation homogène est

$$y(x) = C\,\mathrm{e}^{-A(x)} = C\,\mathrm{e}^{\ln(x)} = C\,x$$

   b) Une solution particulière vérifie $y_0'(x) - \dfrac{y_0(x)}{x} = \dfrac{1}{x}$.
   Cette solution s'écrit $y_0(x) = g(x)\,\mathrm{e}^{-A(x)}$ avec $g(x)$ primitive de $f(x)\,\mathrm{e}^{A(x)} = \dfrac{1}{x}\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x^2}$

$$\Rightarrow g(x) = -\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow y_0(x) = -\frac{1}{x}\,x = -1$$

c) La solution générale est $y(x) = C\,x - 1$

d) $y(1) = 0 \iff C - 1 = 0 \iff C = 1.$
La solution est donc $\boxed{y(x) = x - 1}$

3. L'équation est $y'(x) - 2\,y(x) = 2\,x$: $a(x) = -2$ et $f(x) = 2\,x$.

   a) L'équation homogène est $y'(x) - 2\,y(x) = 0.$
   Ici $a(x) = -2$ donc une primitive est $A(x) = -2x$.
   La solution générale de l'équation homogène est

$$y(x) = C\,\mathrm{e}^{-A(x)} = C\,\mathrm{e}^{2x}$$

   b) Une solution particulière vérifie $y_0'(x) - 2\,y_0(x) = 2\,x.$
   Cette solution s'écrit $y_0(x) = g(x)\,\mathrm{e}^{-A(x)}$ avec $g(x)$ primitive de $f(x)\,\mathrm{e}^{A(x)} = 2\,x\,\mathrm{e}^{-2x}$

$$\Rightarrow g(x) = \int_c^x 2\,t\,\mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t$$

   Posons $u(t) = t$, $v'(t) = 2\mathrm{e}^{-2t} \Rightarrow u'(t) = 1$, $v(t) = -\mathrm{e}^{-2t}$:

$$g(x) = \left[-t\,\mathrm{e}^{-2t}\right]_c^x + \int_c^x \mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t = \left[-t\,\mathrm{e}^{-2t} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}\right]_c^x = -x\,\mathrm{e}^{-2x} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x} = -\frac{2x+1}{2}\,\mathrm{e}^{-2x}$$

$$\Rightarrow y_0(x) = -\frac{2x+1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{e}^{2x} = -\frac{2x+1}{2}$$

   c) La solution générale est $y(x) = C\mathrm{e}^{2x} - \dfrac{2x+1}{2}$

   d) $y(0) = \dfrac{1}{4} \iff C - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4} \iff C = \dfrac{3}{4}.$
   La solution est donc $\boxed{y(x) = \dfrac{3}{4}\mathrm{e}^{2x} - \dfrac{2x+1}{2}}$

4. L'équation est $y'(x) - \dfrac{2x-1}{x^2}y(x) = 1$: $a(x) = -\frac{2x-1}{x^2}$ et $f(x) = 1$.

   a) L'équation homogène est $y'(x) - \dfrac{2x-1}{x^2}y(x) = 0.$
   Ici $a(x) = -\dfrac{2x-1}{x^2} = -\dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2}$ donc une primitive est $A(x) = -2\ln|x| - \frac{1}{x} = -2\ln(x) - \frac{1}{x}$ car $x > 0$.
   La solution générale de l'équation homogène est

$$y(x) = C\,\mathrm{e}^{-A(x)} = C\,\mathrm{e}^{2\ln(x)+1/x} = C\,x^2\,\mathrm{e}^{1/x}$$

   b) Une solution particulière vérifie $y_0'(x) - \dfrac{2x-1}{x^2}y_0(x) = 1.$
   Cette solution s'écrit $y_0(x) = g(x)\mathrm{e}^{-A(x)}$ avec $g(x)$ primitive de $f(x)\,\mathrm{e}^{A(x)} = \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-1/x}.$
   $g(x)$ est de la forme $u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$ avec $u(x) = -1/x$:

$$\Rightarrow g(x) = \mathrm{e}^{u(x)} = \mathrm{e}^{-1/x} \Rightarrow y_0(x) = \mathrm{e}^{-1/x}\,x^2\,\mathrm{e}^{1/x} = x^2$$

c) La solution générale est $y(x) = C\,x^2\,\mathrm{e}^{1/x} + x^2$

d) $y(1) = 1 \iff C\,e + 1 = 1 \iff C = 0.$
La solution est donc $\boxed{y(x) = x^2}$

5. L'équation est $y'(x) - \dfrac{x}{x+1}y(x) = -\dfrac{1}{x+1}$: $a(x) = -\dfrac{x}{x+1}$ et $f(x) = -\dfrac{1}{x+1}$.

   a) L'équation homogène est $y'(x) - \dfrac{x}{x+1}y(x) = 0$.
   Ici $a(x) = -\dfrac{x}{x+1} = \dfrac{1}{x+1} - 1$ donc une primitive est $A(x) = \ln|x+1| - x = \ln(x+1) - x$.
   La solution générale de l'équation homogène est

$$y(x) = C\mathrm{e}^{-A(x)} = C\mathrm{e}^{-\ln(x+1)+x} = C\frac{\mathrm{e}^x}{x+1}$$

   b) Une solution particulière vérifie $y_0'(x) - \dfrac{x}{x+1}y_0(x) = -\dfrac{1}{x+1}$.
   Cette solution s'écrit $y_0(x) = g(x)\mathrm{e}^{-A(x)}$
   avec $g(x)$ primitive de $-\dfrac{1}{x+1}\mathrm{e}^{A(x)} = -\dfrac{(x+1)\mathrm{e}^{-x}}{x+1} = -\mathrm{e}^{-x}$.

$$\Rightarrow g(x) = \mathrm{e}^{-x} \Rightarrow y_0(x) = \mathrm{e}^{-x}\frac{\mathrm{e}^x}{x+1} = \frac{1}{x+1}$$

   c) La solution générale est $y(x) = C\dfrac{\mathrm{e}^x}{x+1} + \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{C\mathrm{e}^x + 1}{x+1}$

   d) $y(0) = 2 \iff C + 1 = 2 \iff C = 1.$
   La solution est donc $\boxed{y(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x + 1}{x+1}}$

Exercice 3

Soit λ un réel non nul, on s'intéresse aux solutions de l'équation différentielle

$$y'(x) - \lambda y(x) = f(x)$$

avec $f(x)$ une fonction particulière.
Déterminer l'expression de la solution générale lorsque :

1. $f(x) = a$ *avec* $a \in \mathbb{R}^*$
2. $f(x) = \alpha\mathrm{e}^{\omega x}$ *avec* $\alpha \in \mathbb{R}^*$ *et* $\omega \in \mathbb{R}^*$
3. $f(x) = ax^2 + bx + c$ *avec* $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ *et* $c \in \mathbb{R}$
   (indication : chercher la solution particulière sous la forme $y_0(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$*)*

Réponse :
a) La solution de l'équation homogène $y'(x) - \lambda y(x) = 0$ est

$$y(x) = C\mathrm{e}^{\lambda x}$$

car $a(x) = -\lambda \Rightarrow A(x) = -\lambda x \Rightarrow \mathrm{e}^{-A(x)} = \mathrm{e}^{\lambda x}$
b) Solution particulière de $y_0'(x) - \lambda y_0(x) = f(x)$:
$y_0(x) = g(x)\mathrm{e}^{-A(x)} = g(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$ avec $g(x)$ primitive de $f(x)\mathrm{e}^{A(x)} = f(x)\mathrm{e}^{-\lambda x}$

1. $f(x) = a$: $g(x)$ primitive de $a\mathrm{e}^{-\lambda x}$

$$g(x) = -\frac{a}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda x} \Rightarrow y_0(x) = -\frac{a}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{e}^{\lambda x} = -\frac{a}{\lambda}$$

2. $f(x) = \alpha\mathrm{e}^{\omega x}$: $g(x)$ primitive de $\alpha\mathrm{e}^{(\omega-\lambda)x}$
   — si $\omega = \lambda$, $g(x)$ primitive de α :

$$g(x) = \alpha x \Rightarrow y_0(x) = \alpha x\mathrm{e}^{\lambda x}$$

   — si $\omega \neq \lambda$,

$$g(x) = \frac{\alpha}{\omega-\lambda}\mathrm{e}^{(\omega-\lambda)x} \Rightarrow y_0(x) = \frac{\alpha}{\omega-\lambda}\mathrm{e}^{(\omega-\lambda)x}\mathrm{e}^{\lambda x} = \frac{\alpha}{\omega-\lambda}\mathrm{e}^{\omega x}$$

3. On cherche $y_0(x)$ sous la forme $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$:

$$y_0'(x) = 2\alpha x + \beta$$

$$\Rightarrow y_0'(x) - \lambda y_0(x) = \underbrace{-\alpha\lambda}_{=a} x^2 + \underbrace{(2\alpha-\beta\lambda)}_{=b} x + \underbrace{(\beta-\gamma\lambda)}_{=c}$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -\alpha\lambda & = & a \\ 2\alpha-\beta\lambda & = & b \\ \beta-\gamma\lambda & = & c \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \alpha & = & -a/\lambda \\ \beta & = & -b/\lambda - a/\lambda^2 \\ \gamma & = & -c/\lambda - b/\lambda^2 - a/\lambda^3 \end{array}\right.$$

Exercice 4

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y''(x) - 5\,y'(x) + 6\,y(x) = 0$
2. $y''(x) - y'(x) = 0$
3. $y''(x) + 4\,y'(x) + 4\,y(x) = 0$
4. $y''(x) + 4\,y(x) + 13\,y(x) = 0$

Réponse :

1. L'équation caractéristique est $r^2 - 5r + 6 = 0$:

$$\Delta = 1 > 0 \Rightarrow r_1 = 2 \text{ et } r_2 = 3$$

   La solution générale est $\boxed{y(x) = C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2\mathrm{e}^{3x}}$

2. L'équation caractéristique est $r^2 - 1 = 0$:

$$\Delta = 4 > 0 \Rightarrow r_1 = -1 \text{ et } r_2 = 1$$

   La solution générale est $\boxed{y(x) = C_1\mathrm{e}^{-x} + C_2\mathrm{e}^{x}}$

3. L'équation caractéristique est $r^2 + 4r + 4 = 0$:

$$\Delta = 0 \Rightarrow r = -2$$

   La solution générale est $\boxed{y(x) = (C_1 x + C_2)\mathrm{e}^{-2x}}$

4. L'équation caractéristique est $r^2 + 4r + 13 = 0$:

$$\Delta = -36 < 0 \Rightarrow r = -2 \pm 3i$$

   La solution générale est $\boxed{y(x) = (C_1\cos(3x) + C_2\sin(3x))\mathrm{e}^{-2x}}$

Exercice 5

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y''(x) - 5\,y'(x) + 4\,y(x) = 0 \quad , \quad y(0) = 5 \quad , \quad y'(0) = 8$
2. $y''(x) + 4\,y(x) = 0 \quad , \quad y(0) = 0 \quad , \quad y'(0) = 2$
3. $y''(x) + 2\,y'(x) + y(x) = 0 \quad , \quad y(0) = 1 \quad , \quad y'(0) = 0$
4. $y''(x) + 3\,y'(x) = 0 \quad , \quad y(0) = 0 \quad , \quad y(1) = 1$

Réponse :

1. L'équation caractéristique est $r^2 - 5r + 4 = 0$:

$$\Delta = 9 > 0 \Rightarrow r_1 = 1 \text{ et } r_2 = 4$$

La solution générale est

$$y(x) = C_1\mathrm{e}^{x} + C_2\mathrm{e}^{4x} \Rightarrow y'(x) = C_1\mathrm{e}^{x} + 4C_2\mathrm{e}^{4x}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{ccccc} y(0) & = & C_1 + C_2 & = & 5 \\ y'(0) & = & C_1 + 4C_2 & = & 8 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} C_1 & = & 1 \\ C_2 & = & 1 \end{array} \right.$$

La solution est $\boxed{y(x) = \mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{4x}}$

2. L'équation caractéristique est $r^2 + 4 = 0$:

$$\Delta = -16 < 0 \Rightarrow r = \pm 2i$$

La solution générale est

$$y(x) = C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x) \Rightarrow y'(x) = -2C_1\sin(2x) + 2C_2\cos(2x)$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{ccccc} y(0) & = & C_1 & = & 0 \\ y'(0) & = & 2C_2 & = & 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} C_1 & = & 0 \\ C_2 & = & 1 \end{array} \right.$$

La solution est $\boxed{y(x) = \sin(2x)}$

3. L'équation caractéristique est $r^2 + 2r + 1 = 0$:

$$\Delta = 0 \Rightarrow r = -1$$

La solution générale est

$$y(x) = (C_1x + C_2)\mathrm{e}^{-x} \Rightarrow y'(x) = C_1\mathrm{e}^{-x} - (C_1x + C_2)\mathrm{e}^{-x}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{ccccc} y(0) & = & C_2 & = & 1 \\ y'(0) & = & C_1 - C_2 & = & 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} C_1 & = & 1 \\ C_2 & = & 1 \end{array} \right.$$

La solution est $\boxed{y(x) = (x+1)\mathrm{e}^{-x}}$

4. L'équation caractéristique est $r^2 + 3r = 0$:

$$\Delta = 9 > 0 \Rightarrow r_1 = 0 \text{ et } r_2 = -3$$

La solution générale est

$$y(x) = C_1 + C_2\mathrm{e}^{-3x}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{ccccc} y(0) & = & C_1 + C_2 & = & 0 \\ y(1) & = & C_1 + C_2\mathrm{e}^{-3} & = & 1 \end{array} \right\} \Rightarrow C_1 = -C_2 = \frac{\mathrm{e}^{3}}{\mathrm{e}^{3} - 1}$$

La solution est $\boxed{y(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{3}}{\mathrm{e}^{3} - 1}(1 - \mathrm{e}^{-3x})}$

Exercice 6

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y''(x) - 3\,y'(x) + 2\,y(x) = 4\,x^2$
   (indication : chercher la solution particulière sous la forme $y_0(x) = a\,x^2 + b\,x + c$*)*
2. $y''(x) + 2\,y'(x) + y(x) = 4\,x\,\mathrm{e}^x$
3. $y''(x) + y(x) = \cos(x)$

Réponse :

1. a) L'équation homogène est $y''(x) - 3y'(x) + 3y(x) = 0$
   l'équation caractéristique est $r^2 - 3r + 2 = 0$:

$$\Delta = 1 > 0 \Rightarrow r_1 = 1 \text{ et } r_2 = 2$$

   La solution générale de l'équation homogène est

$$y(x) = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{2x}$$

   b) $y_0(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow y_0'(x) = 2ax + b \Rightarrow y_0''(x) = 2a$

$$\Rightarrow y_0''(x) - 3y_0'(x) + 2y_0(x) = 2ax^2 + (2b - 6a)x + 2c - 3b + 2a = 4x^2$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 2a & = & 4 \\ 2b - 6a & = & 0 \\ 2c - 3b + 2a & = & 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & 2 \\ b & = & 6 \\ c & = & 7 \end{array} \right.$$

   c) La solution générale de l'équation est $\boxed{y(x) = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{2x} + 2x^2 + 6x + 7}$

2. a) L'équation homogène est $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 0$
   l'équation caractéristique est $r^2 + 2r + 1 = 0$:

$$\Delta = 0 \Rightarrow r = -1$$

   La solution générale de l'équation homogène est

$$y(x) = (C_1x + C_2)\mathrm{e}^{-x}$$

   b) Le second membre est $f(x) = 4x\mathrm{e}^x$.
   On cherche la solution particulière sous la forme $C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$ avec
   $y_1(x) = x\mathrm{e}^{-x}$ ($C_1 = 1$ et $C_2 = 0$)
   $y_2(x) = \mathrm{e}^{-x}$ ($C_1 = 0$ et $C_2 = 1$)

$$\left\{ \begin{array}{lcccc} C_1'(x)y_1(x) & + & C_2'(x)y_2(x) & = & 0 \\ C_1'(x)y_1'(x) & + & C_2'(x)y_2'(x) & = & f(x) \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{ccccc} C_1'(x)x\mathrm{e}^{-x} & + & C_2'(x)\mathrm{e}^{-x} & = & 0 \\ C_1'(x)(1-x)\mathrm{e}^{-x} & - & C_2'(x)\mathrm{e}^{-x} & = & 4x\mathrm{e}^x \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{cccccc} C_1'(x)x & + & C_2'(x) & = & 0 & (1) \\ C_1'(x)(1-x) & - & C_2'(x) & = & 4x\mathrm{e}^{2x} & (2) \end{array} \right.$$

$$(1) + (2)\ :\ C_1'(x) = 4x\mathrm{e}^{2x} \Rightarrow C_1(x) = \int_c^x 4t\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t$$

   On pose $u(t) = 2t$, $v'(t) = 2\mathrm{e}^{2t} \Rightarrow u'(t) = 2$, $v(t) = \mathrm{e}^{2t}$

$$C_1(x) = \left[2t\mathrm{e}^{2t}\right]_c^x - \int_c^x 2\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t = \left[2t\mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^2t\right]_c^x = (2x-1)\mathrm{e}^{2x}$$

$$\text{et donc } C_2'(x) = -xC_1'(x) = -4x^2\mathrm{e}^{2x}$$
$$C_2(x) = -\int_c^x 4t^2\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t$$

On pose $u(t) = 2t^2$, $v'(t) = 2\mathrm{e}^{2t} \Rightarrow u'(t) = 4t$, $v(t) = \mathrm{e}^{2t}$

$$\Rightarrow C_2(x) = -\left[2t^2\mathrm{e}^{2t}\right]_c^x + \int_c^x 4\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t = \left[-2t^2\mathrm{e}^{2t} + (2t-1)\mathrm{e}^{2t}\right]_c^x = (-2x^2+2x-1)\mathrm{e}^{2x}$$

Une solution particulière est donc

$$\begin{aligned} y_0(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) &= (2x-1)\mathrm{e}^{2x}x\mathrm{e}^{-x} + (-2x^2+2x-1)\mathrm{e}^{2x}\mathrm{e}^{-x} \\ &= (x-1)\mathrm{e}^{x} \end{aligned}$$

c) La solution générale de l'équation est $\boxed{y(x) = (C_1x + C_2)\mathrm{e}^{-x} + (x-1)\mathrm{e}^{x}}$

3. a) L'équation homogène est $y''(x) + y(x) = 0$
l'équation caractéristique est $r^2 + 1 = 0$:

$$\Delta = -4 < 0 \Rightarrow r = \pm i$$

La solution générale de l'équation homogène est

$$y(x) = C_1\cos(x) + C_2\sin(x)$$

b) Le second membre est $f(x) = \cos(x)$.
On cherche la solution particulière sous la forme $C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$ avec
$y_1(x) = \cos(x)$ ($C_1 = 1$ et $C_2 = 0$)
$y_2(x) = \sin(x)$ ($C_1 = 0$ et $C_2 = 1$)

$$\left\{\begin{array}{rcl} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) &=& 0 \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) &=& f(x) \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{rcll} C_1'(x)\cos(x) + C_2'(x)\sin(x) &=& 0 & (1) \\ -C_1'(x)\sin(x) + C_2'(x)\cos(x) &=& \cos(x) & (2) \end{array}\right.$$

$$\cos(x)(1) - \sin(x)(2) \;:\; C_1'(x) = -\sin(x)\cos(x) = -\frac{\sin(2x)}{2} \Rightarrow C_1(x) = \frac{\cos(2x)}{4}$$
$$\sin(x)(1) + \cos(x)(2) \;:\; C_2'(x) = \cos^2(x) = \frac{\cos(2x)+1}{2} \Rightarrow C_2(x) = \frac{\sin(2x)}{4} + \frac{x}{2}$$

Une solution particulière est donc

$$\begin{aligned} y_0(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) &= \frac{\cos(2x)\cos(x) + \sin(2x)\sin(x)}{4} + \frac{x\sin(x)}{2} \\ &= \frac{\cos(x)}{4} + \frac{x\sin(x)}{2} \end{aligned}$$

c) La solution générale de l'équation est
$$\boxed{y(x) = C_1\cos(x) + C_2\sin(x) + \frac{\cos(x)}{4} + \frac{x\sin(x)}{2} = C_3\cos(x) + \left(C_2 + \frac{x}{2}\right)\sin(x)}$$

Exercice 7

On considère l'équation différentielle $|x|y'(x) + (x-1)y(x) = x^3$.

1. *Donner l'ensemble des solutions de l'équation précédente pour $x \in]0, +\infty[$.*

2. Donner l'ensemble des solutions de l'équation précédente pour $x \in]-\infty, 0[$.

Réponse :

1. pour $x \in]0, +\infty[$, l'équation est

$$xy'(x) + (x-1)y(x) = x^3 \iff y'(x) + \frac{x-1}{x}y(x) = x^2$$

a) l'équation homogène est $y'(x) + \dfrac{x-1}{x}y(x) = 0$

$$a(x) = \frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x} \Rightarrow A(x) = x - \ln|x| = x - \ln(x)$$

La solution générale de l'équation homogène est $y'(x) = C_1 \mathrm{e}^{-A(x)} = C_1 x \mathrm{e}^{-x}$
b) une solution particulière est $y_0(x) = g(x)\mathrm{e}^{-A(x)}$
avec $g(x)$ primitive de $f(x)\mathrm{e}^{A(x)} = x^2 \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = x\mathrm{e}^x$

$$\Rightarrow g(x) = (x-1)\mathrm{e}^x \text{ et } y_0(x) = (x-1)\mathrm{e}^x x \mathrm{e}^{-x} = x(x-1)$$

c) la solution générale pour $x \in]0, +\infty[$ est $\boxed{y(x) = C_1 x \mathrm{e}^{-x} + x(x-1)}$

2. pour $x \in]-\infty, 0[$, l'équation est

$$-xy'(x) + (x-1)y(x) = x^3 \iff y'(x) + \frac{1-x}{x}y(x) = -x^2$$

a) l'équation homogène est $y'(x) + \dfrac{1-x}{x}y(x) = 0$

$$a(x) = \frac{1-x}{x} = \frac{1}{x} - 1 \Rightarrow A(x) = \ln|x| - x = \ln(-x) - x$$

La solution générale de l'équation homogène est $y'(x) = C_2 \mathrm{e}^{-A(x)} = -C_2 \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$
b) une solution particulière est $y_0(x) = g(x)\mathrm{e}^{-A(x)}$
avec $g(x)$ primitive de $f(x)\mathrm{e}^{A(x)} = -x^2(-x\mathrm{e}^{-x}) = x^3\mathrm{e}^{-x}$

$$\Rightarrow g(x) = -(x^3 + 3x^2 + 6x + 6)\mathrm{e}^{-x}$$

$$\Rightarrow y_0(x) = -(x^3 + 3x^2 + 6x + 6)\left(-\frac{\mathrm{e}^x}{x}\right) = \frac{x^3 + 3x^2 + 6x + 6}{x}$$

c) la solution générale pour $x \in]-\infty, 0[$ est $\boxed{y(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2 + 6x + 6 - C_2\mathrm{e}^x}{x}}$