Université de Relizane

Faculté des Sciences et Technologie

Département de Génie Mécanique

-2021/2022-

Comportement Mécanique des Matériaux Composites et Multi-Matériaux

-S2- MI GM

CHAPITRE 2 (Suite)

Approche classique des composites : spécificité du calcul des composites

Une structure composite stratifiée consiste en un système de couches liées ensemble. Les couches peuvent être constituées de différents matériaux isotropes ou anisotropes, et avoir des structures, des épaisseurs et des propriétés mécaniques différentes. Les caractéristiques du stratifié sont généralement calculées en utilisant les informations concernant le nombre de couches, leur séquence d'empilement, les propriétés géométriques et mécaniques qui doivent être connues. Un nombre fini de couches peut être combiné pour former de stratifiés. Le stratifié est caractérisé par 21 coefficients indépendants.

Ainsi, notre objectif est de fournir des équations permettant de prédire le comportement d'un stratifié en tant que système de couches avec des propriétés données. La seule restriction imposée au stratifié en tant qu'élément d'une structure composite concerne son épaisseur totale qui est supposée bien inférieure aux autres dimensions de la structure.

1. Etude des lois de comportement anisotrope 3D

Les relations contrainte-déformation des matériaux en termes de modules d'élasticité généralisés, de coefficients de Poisson et de modules de cisaillement sont très fréquemment utilisées dans les analyses d'ingénierie.

Ces modules élastiques généralisés sont parfois appelés constantes d'ingénierie ou constantes techniques car ils ont des significations physiques plus directes que les constantes élastiques relativement abstraites.

Les constantes d'ingénierie peuvent être mesurées dans des tests simples tels que des tests de traction uniaxiale ou de cisaillement pur. Dans ces essais, les déplacements ou déformations d'un spécimen sont mesurés par rapport à une charge ou contrainte connue. La déformation mesurée peut être facilement représentée comme une fonction linéaire de la contrainte, à partir de laquelle des relations entre les constantes élastiques et les constantes d'ingénierie peuvent être établies.

Les matériaux ayant des propriétés différentes dans différentes directions sont appelés anisotropes. Un cas particulier d'anisotropie est l'existence de deux plans de symétrie mutuellement perpendiculaires dans les propriétés des matériaux. De tels matériaux sont appelés orthotropes. Les composites fibreux avec des fibres courtes orientées ou des fibres continues sont de nature orthotrope. Dans de tels composites, les propriétés sont définies dans le plan de la couche dans deux directions ; la direction le long des fibres et la direction perpendiculaire à l'orientation des fibres.

- Loi de Hooke

La relation contrainte-déformation pour un milieu élastique linéaire anisotrope tridimensionnel, également connue sous le nom de loi de Hook, est exprimée sous la forme matricielle suivante :

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\}$$

$\{\sigma\}$ et $\{\varepsilon\}$ les composantes indépendantes des tenseurs des contraintes et des déformations présentées sous forme vectorielle (Notations de Voigt) comme suit :

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \end{Bmatrix} \; et \; \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} = 2\varepsilon_{23} \\ \gamma_{13} = 2\varepsilon_{13} \\ \gamma_{12} = 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix}$$

$[C]$ appelé la matrice de rigidité ou matrice des coefficients élastiques.

Matrice de rigidité d’un matériau anisotrope et Nombres de constantes d’élasticité

Dans le cas le plus général d'un corps anisotrope, la loi de Hooke généralisée, où 36 modules élastiques sont définis et seuls 21 d'entre eux sont indépendants. Ce cas correspond à un matériau ne possédant aucune propriété de symétrie. Un tel matériau est appelé matériau triclinique ou matériau anisotrope.

La loi de comportement sous forme matricielle s’écrit :

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}}_{\{\sigma\}} = \underbrace{\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix}}_{[C]} \underbrace{\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}}_{\{\varepsilon\}}$$

- Matériau orthotrope (orthogonal+anisotrope)

Un matériau orthotrope possède trois plans de symétrie, perpendiculaires deux à deux. Il est à noter que l’existence de deux plans de symétrie perpendiculaires implique l’existence du troisième. La matrice de rigidité dans ce cas est déterminée par 12 constantes indépendantes.

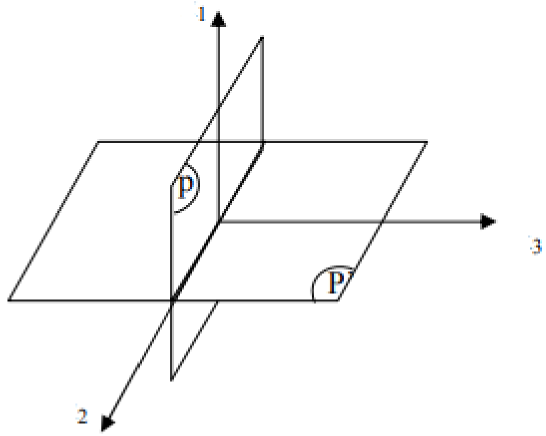


Fig. 2.6 Plans de symétrie d’un matériau orthotrope

La forme de la matrice de rigidité est donc :

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}$$

Le nombre de constantes d'élasticité indépendantes est ramené à 9.

Le cas particulier le plus fréquent correspond à une matériau orthotrope (orthogonalement anisotrope) qui a trois axes d'orthotropie orthogonaux (coordonnées) tels que les contraintes normales agissant le long de ces axes n'induisent pas de déformations de cisaillement, tandis que les contraintes de cisaillement agissant dans les plans de coordonnées ne provoquent pas de déformations normales dans la direction de ces axes.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{21}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{31}}{E_3} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}$$

Où E_1, E_2 et E_3 désignent les modules orthotropes d'élasticité par rapport aux directions x, y, z et G_{23}, G_{31}, G_{12} sont les modules de cisaillement orthotropes dans les plans yz, zx et xy, respectivement. ν_{ij} est le coefficient de Poisson pour la déformation dans la direction j lorsqu'il est sollicité dans la direction i.

En raison de la symétrie des coefficients dans la relation contrainte-déformation de l'équation précédente, nous avons les identités :

$$\frac{\nu_{ij}}{E_j} = \frac{\nu_{ji}}{E_i}$$

Ainsi, il existe trois relations réciproques qui doivent être satisfaites pour les matériaux orthotropes et seuls trois des six coefficients de Poisson sont indépendants.

Les constantes élastiques, C_{ij} pour un matériau orthotrope peuvent être exprimées en termes de constantes d'ingénierie. Ces relations sont :

$$C_{11} = \frac{E_1(1 - \nu_{23}\nu_{32})}{Q}$$

$$C_{12} = \frac{E_1(\nu_{21} - \nu_{31}\nu_{23})}{Q} = \frac{E_2(\nu_{12} - \nu_{13}\nu_{32})}{Q}$$

$$C_{22} = \frac{E_2(1 - \nu_{13}\nu_{31})}{Q}$$

$$C_{13} = \frac{E_1(\nu_{31} - \nu_{21}\nu_{32})}{Q} = \frac{E_3(\nu_{13} - \nu_{12}\nu_{23})}{Q}$$

$$C_{33} = \frac{E_3(1 - \nu_{12}\nu_{21})}{Q}$$

$$C_{23} = \frac{E_2(\nu_{32} - \nu_{12}\nu_{31})}{Q} = \frac{E_3(\nu_{23} - \nu_{21}\nu_{13})}{Q}$$

$$C_{44} = C_{23}$$

$$C_{55} = C_{31}$$

$$C_{66} = C_{12}$$

$$Q = 1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{13}\nu_{31} - 2\nu_{12}\nu_{23}\nu_{31}$$

- Matériau isotrope transverse

Dans les équations ci-dessus, si le matériau est transversalement isotrope, c'est-à-dire que les propriétés dans les deux directions transversales, par exemple, dans les directions x et y, sont les mêmes, nous avons :

$$\nu_{31} = \nu_{32} = \nu_{LT}$$

$$\nu_{12} = \nu_{TT}$$

$$G_{31} = G_{32} = G_{LT}$$

$$G_{12} = G_{TT}$$

$$E_1 = E_2 = E_T$$

$$E_3 = E_L$$

- Comportement anisotrope 2D

Les propriétés de la couche composite (telles que la résistance, la rigidité, la conductivité thermique et à l'humidité, la résistance à l'usure et à l'environnement) dépendent fortement de la forme du renforcement dans le stratifié. La nature directionnelle des fibres dans un stratifié renforcé de fibres introduit une dépendance directionnelle à la plupart de ces propriétés. Les matériaux dont les propriétés sont indépendantes de la direction sont appelés matériaux isotropes.

Un exemple typique d'une propriété de matériau orthotrope des composites renforcés de fibres unidirectionnelles est la rigidité.

La partie matrice du composite, qui maintient la fibre ensemble, est généralement isotrope. À toutes fins pratiques, les fibres, qui ont généralement une rigidité beaucoup plus élevée que le matériau de la matrice, sont également isotropes.

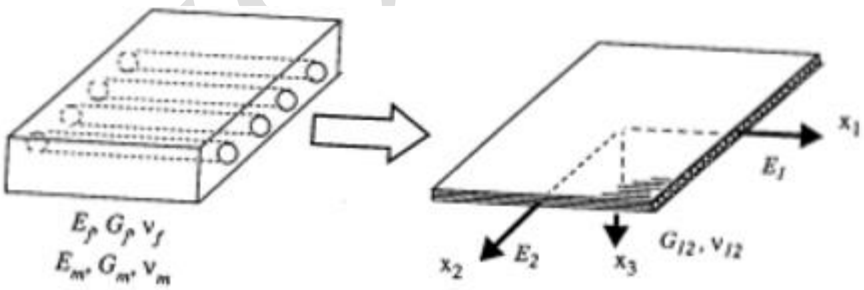


Figure 2.2 : Propriétés élastiques d'une couche composite renforcée de fibres unidirectionnelles

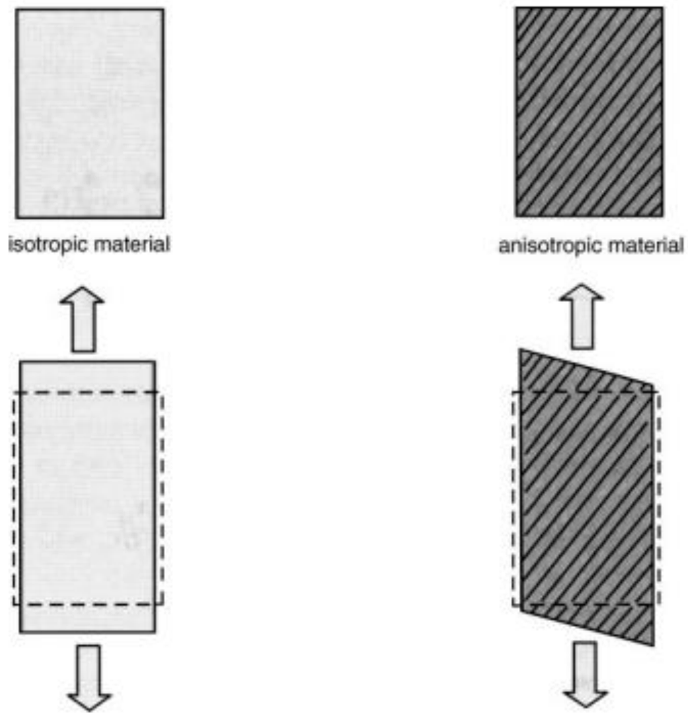
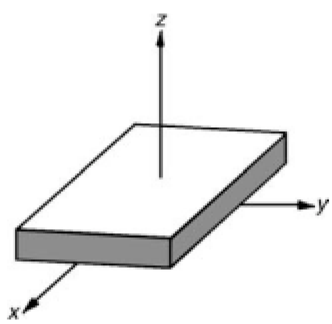


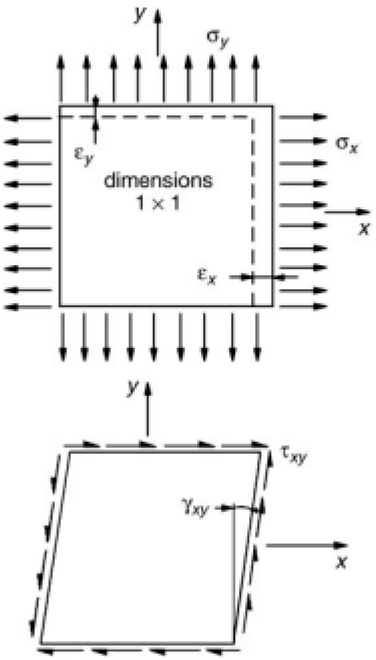
Figure 2.1 Comparaison entre Déformation d'une plaque Isotropique et Anisotropique

Dans ce cas, les lignes obliques représentent les directions privilégiées selon lesquelles on placerait les fibres de renfort. On peut considérer qu'un chargement longitudinal appliqué à une plaque isotrope créerait une extension dans le sens longitudinal et une contraction dans le sens transversal. Le même chargement appliqué à une plaque anisotrope crée une distorsion angulaire, en plus de l'extension longitudinale et de la contraction transversale.

Dans le cas simple de la contrainte plane, on peut obtenir les constantes élastiques à l'aide des relations contrainte-déformation.

- *Matériau isotrope*





$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E}$$
$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

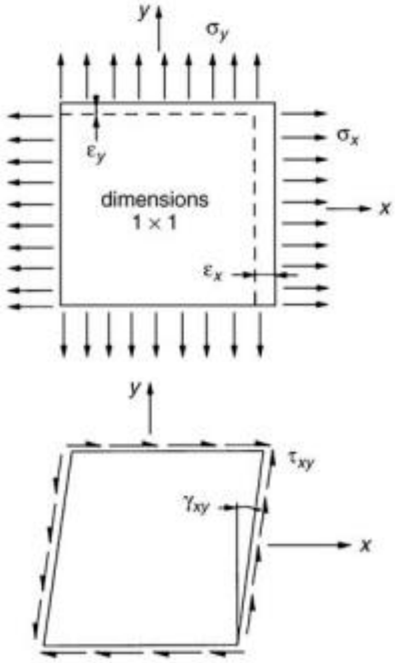
Figure 2.2 : Comportement contrainte-déformation d'un matériau Isotrope

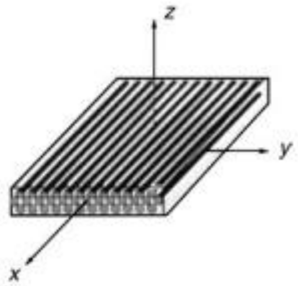
$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}$$

Il y a trois constantes élastiques : E, ν, G dont il existe une relation entre elles comme :

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

- *Matériau anisotrope*





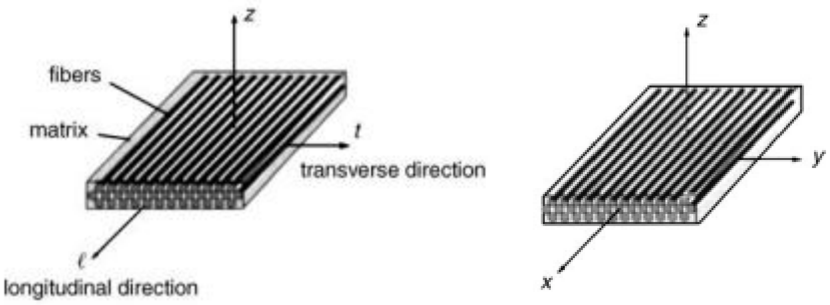
$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E_x} - \nu_{xy}\frac{\sigma_y}{E_y}$$
$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E_y} - \nu_{xy}\frac{\sigma_x}{E_x}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G_{xy}}$$

Figure 2.3 Déformation d’un matériau anisotrope

- Repère du pli

Les relations suivantes sont valables pour un matériau élastique et isotrope.



Considérons une couche unidirectionnelle dont l'axe matériel principal I fait un certain angle φ avec l'axe x du cadre de coordonnées global.

Les matrices de rigidité et de souplesse

Les matrices de rigidité et de souplesse deviennent découplées par rapport aux contraintes et déformations normales d'un côté et aux contraintes et déformations de cisaillement de l'autre côté.

Pour le cas d'un matériau orthotrope, avec des axes x, y et z coïncidant avec les axes d'orthotropie :

- Coefficients de souplesse

L'équation matricielle pour un matériau anisotrope

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_2} & 0 \\ -\frac{\nu_{21}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}$$

$$[S] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_2} & 0 \\ -\frac{\nu_{21}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix}$$

Notez que la matrice contrainte-déformation ci-dessus est symétrique.

Le nombre de constantes élastiques distinctes est de cinq :

- Deux modules d'élasticité : E_1 et E_2,

- Deux coefficients de Poisson : ν_{12} et ν_{21}, et

- Un module de cisaillement : G_{12}.

En fait, il n'y a que quatre constantes élastiques indépendantes :

E_1, E_2, G_{12} et ν_{21} (ou ν_{12}). La cinquième constante élastique peut être obtenue à partir des autres en utilisant la relation de symétrie :

$$\nu_{12} = \nu_{21} \frac{E_1}{E_2}$$

- Coefficients de raideur

On peut l'écrire sous la forme

$$\sigma = Q\varepsilon$$

D’où

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{11} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}$$

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \qquad Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}$$

$$Q_{12} = \frac{E_1\nu_{12}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{E_2\nu_{21}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \qquad et$$

$$Q_{66} = G_{12}$$

Où la matrice Q est appelée matrice de rigidité matérielle réduite.

Pour le cas d'un matériau orthotrope, avec des axes x, y et z faisant un angle avec les axes d'orthotropie

La plupart des composites renforcés de fibres sont fabriqués sous la forme d'un ensemble uniaxial de fibres entourées d'une matrice polymère. L'élément de base dans la plupart des structures composites à fibres longues est une strate de fibres plus une matrice, toutes les fibres étant orientées dans une direction. Un stratifié est formé en empilant des couches d'au moins deux stratifiés qui peuvent avoir des orientations de fibres différentes. Par conséquent, les axes orthotropes des lamelles peuvent ne pas nécessairement coïncider avec les axes de coordonnées qui sont géométriquement naturels à la solution mathématique du lamifié. Par exemple, considérons la plaque monocouche renforcée de fibres illustrée à la figure ci-dessous. Les coordonnées naturelles à la solution du problème de plaque sont les coordonnées de plaque x, y et z, alors que les axes orthotropes du matériau sont $\alpha, \beta\ et\ \gamma$. Ainsi, une relation est nécessaire entre les contraintes et les déformations dans la direction s des axes orthotropes et celles dans les coordonnées de la plaque. Une méthode de transformation d'une relation contrainte-déformation d'un système de coordonnées à un autre est également nécessaire pour que les propriétés du matériau puissent être décrites dans n'importe quel système de coordonnées arbitraire. Dans cette situation, la relation contrainte-déformation par rapport aux coordonnées de la plaque x, y et z est donné ci-dessous.

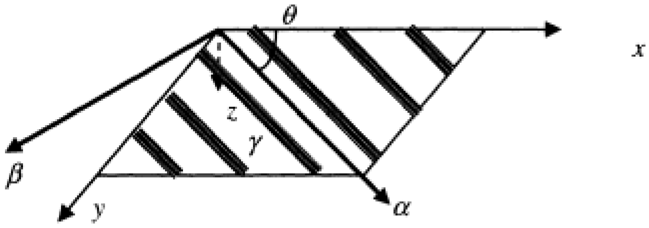


Figure : Plaque monocouche renforcée de fibres

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}$$

$$\bar{Q}_{11} = C_{11}m^4 + 2(C_{12} + 2C_{66})m^2n^2 + C_{22}n^4$$
$$\bar{Q}_{12} = C_{12}(m^4 + n^4) + (C_{11} + C_{12} - 4C_{66})m^2n^2$$
$$\bar{Q}_{22} = C_{11}n^4 + 2(C_{12} + 2C_{66})m^2n^2 + C_{22}m^4$$
$$\bar{Q}_{16} = -C_{22}mn^3 + C_{11}m^3n - mn(m^2 - n^2)(C_{12} + 2C_{66})$$
$$\bar{Q}_{26} = -C_{22}m^3n + C_{11}mn^3 + mn(m^2 - n^2)(C_{12} + 2C_{66})$$
$$\bar{Q}_{66} = (C_{11} + C_{22} - 2C_{12})m^2n^2 + C_{66}(m^2 - n^2)^2$$

Dans l'équation précédente, $m = cos\theta$, $n = sin\theta$. Les C_{ij} sont les constantes élastiques orthotropes de la plaque dans le système de coordonnées α, β, γ comme indiqué dans l'équation, où les axes orthotropes de le matériau coïncide avec les trois axes de coordonnées orthogonaux. Les C_{ij} sont les constantes élastiques transformées dans le système de coordonnées x, y, z et représentent les constantes élastiques d'une couche d'angle typique.