

Comportement Mécanique des Matériaux Composites et Multi-Matériaux -S2- MI GM

CHAPITRE 3 Calculs d'homogénéisations des composites

- [Homogénéisation pour le calcul des modules](#)

Couche isotrope unique

Un problème simple dans le plan peut être formulé pour une plaque rectangulaire chargée soit par des contraintes de bord uniformes, soit par des déplacements de bord uniformes. Par exemple, pour une couche isotrope rectangulaire avec des bords non contraints chargés par une charge uniaxiale P selon l'axe x , les équations d'équilibre de la plaque et les conditions aux limites nous disent que la contrainte de cisaillement dans le plan τ_{xy} et la contrainte transversale σ_y peuvent être nulles partout, et la contrainte axiale est uniforme dans toute la couche et est égale à :

$$\sigma_x = \frac{F}{S}$$

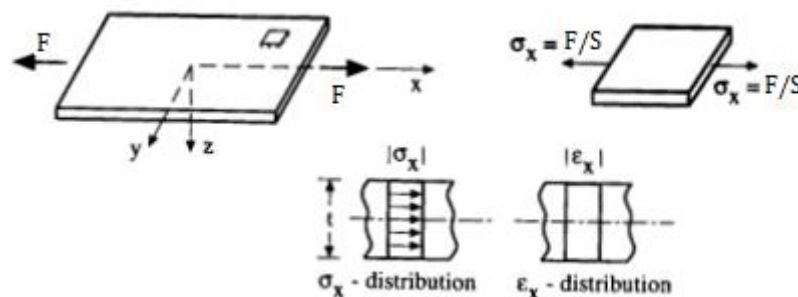


Figure 3.1 : Distribution des contraintes et déformation dans une couche isotrope unique

Où S est la section transversale de la couche normale à l'axe de chargement.

Étant donné que les contraintes sont constantes, les déformations sont également constantes dans toute la couche, comme indiqué sur la figure... et sont calculées à partir de l'équation suivante :

$$\varepsilon_x = \frac{F}{SE}, \quad \varepsilon_y = \frac{-\nu F}{SE}$$

Pour obtenir les déplacements du stratifié, nous intégrons les deux premiers de l'équation et obtenons les déplacements longitudinaux et transversaux comme :

$$u = \left(\frac{F}{SE}\right)x + c_1(y), \quad v = -\nu\left(\frac{F}{SE}\right)y + c_2(x)$$

Respectivement, puisque le chargement est en traction uniaxiale et que la contrainte de cisaillement τ_{xy} est nulle, la déformation de cisaillement γ_{xy} est identiquement nulle partout :

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = c_1'(y) + c_2'(x) = 0$$

Afin de satisfaire l'équation ci-dessus, c_1 et c_2 sont, dans le cas le plus général, des fonctions linéaires de y et x , respectivement ($c_1=Ay+B$, par exemple). Sur la base de l'uniformité des contraintes et de considérations de symétrie, $u(x, y = y_0) = u(x, y = -y_0)$, c_1 et c_2 sont des constantes dans ce cas et peuvent être obtenues à partir des conditions aux limites sur u et v .

Il est important de souligner que l'uniformité des contraintes sur le domaine nous a permis d'aboutir à la solution évoquée ci-dessus. Pour les problèmes avec des charges appliquées non uniformes ou des domaines qui provoquent une distribution interne non uniforme des contraintes (comme les plaques avec des trous ou des ouvertures), les contraintes et les déplacements sont des fonctions des coordonnées x et y . La détermination des déplacements et des contraintes dans de tels cas nécessite généralement la solution des deux équations d'équilibre en tant que système couplé, souvent par des schémas numériques tels que les différences finies ou les éléments finis.

Néanmoins, en un point donné du domaine, la répartition dans l'épaisseur des contraintes et des déformations est toujours uniforme tant qu'il n'y a pas de charges appliquées créant une flexion de la couche.

- [Théorie simplifiée des stratifiés](#)

- **Couches symétriquement stratifiées**

Lorsque plusieurs couches sont assemblées, un ensemble d'hypothèses supplémentaires est nécessaire afin de dériver des équations qui régissent le comportement constitutif du stratifié. Outre le fait que les couches sont dans un état de contrainte plane, chaque couche est supposée parfaitement collée aux couches adjacentes, de sorte que les couches laminées se déforment à l'unisson sans subir de discontinuité dans les déplacements.

Les stratifiés les plus couramment utilisés ont des couches avec des propriétés élastiques d'image miroir par rapport à leur plan médian. C'est-à-dire que la séquence d'empilement des couches (les propriétés élastiques) au-dessus du plan médian est le miroir du dessous. De tels stratifiés sont appelés stratifiés symétriques ou stratifiés symétriques de plan médian. Pour les stratifiés symétriques, des charges dans le plan correctement réparties ne produisent que des déformations dans le plan sur toute l'épaisseur du stratifié. Aux bords du stratifié, les charges dans le plan doivent être appliquées de manière à ce que leurs résultantes se trouvent au milieu du plan du stratifié. Tout décalage par rapport au plan médian provoquerait des moments de flexion par rapport à celui-ci et forcerait le stratifié à se plier.

L'hypothèse de déformation dans le plan associée à l'hypothèse de contrainte plane signifie que les déformations et les contraintes sont constantes sur toute l'épaisseur de chaque couche. L'hypothèse de liaison parfaite garantit que les déformations sont constantes sur toute l'épaisseur du stratifié et, par conséquent, les déformations du stratifié pourraient être caractérisées par les déformations dans une seule couche, disons la couche du plan médian, représentée par ϵ_0 comme indiqué sur la figure....

Le fait d'avoir une répartition constante des contraintes dans l'épaisseur n'implique cependant pas une répartition constante des contraintes.

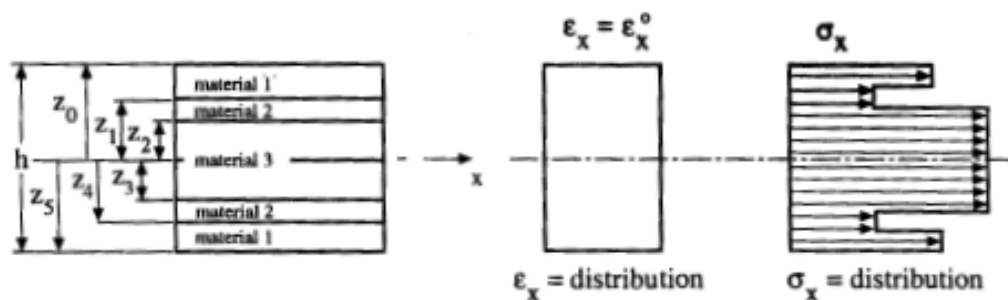


Figure 3.2 : Distribution des contraintes et déformations dans un stratifié symétrique et isotrope

▪ Comportement en membrane

Bien que les contraintes soient constantes dans chaque couche, elles varieront d'une couche à l'autre en fonction de la rigidité des couches individuelles (qui sont supposées être isotropes) suivant la relation contrainte-déformation de l'équation suivante :

$$\sigma_{(k)} = Q_{(k)} \varepsilon^0$$

Où k est le nombre de couches. Cette variation est la principale raison de l'utilisation courante des séquences d'empilement symétrique (ou distribution des propriétés élastiques à travers l'épaisseur) des couches. Pour une séquence d'empilement arbitraire, la répartition des contraintes sur toute l'épaisseur du stratifié donnée par l'équation aura un moment de flexion net. Un tel moment forcera le stratifié à se plier, à moins que la flexion du stratifié ne soit empêchée par un moyen externe pour maintenir le stratifié dans son plan. La possibilité de flexion est exclue si l'on se limite aux stratifiés symétriques par rapport au plan médian du stratifié.

En ce qui concerne la rigidité globale, le stratifié se comporte comme une seule couche avec des propriétés qui sont des moyennes des propriétés des couches individuelles. Le fait que les contraintes varient d'une couche à l'autre rend plus difficile la caractérisation du comportement contrainte-déformation d'un stratifié. Afin de définir une simple relation contrainte-déformation, nous avons besoin d'une quantité qui représente l'effet global d'un composant de contrainte sur la réponse du stratifié. Ceci est réalisé par l'intégration à travers l'épaisseur des composants de contrainte. C'est-à-dire que pour un stratifié d'épaisseur h on définit :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz$$

Où N_x et N_y sont les résultantes de la contrainte normale dans le plan, et N_{xy} est la résultante de la contrainte de cisaillement. Étant donné que les résultantes de contrainte sont obtenues par intégration des contraintes dans l'épaisseur, en les divisant par l'épaisseur h du stratifié, on obtient des contraintes de stratifié moyennes :

$$\begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_x \\ \bar{\sigma}_y \\ \bar{\tau}_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{h} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix}$$

Les contraintes étant constantes au sein d'une couche, l'intégration peut être remplacée par une sommation sur les couches individuelles :

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}_{(k)} dz = \sum_{k=1}^N \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}_{(k)} (z_k - z_{k-1})$$

Où N est le nombre de couches, l'indice (k) désigne les quantités dans la kème couche et les z_k sont les emplacements à travers l'épaisseur des interfaces entre les couches. En substituant la loi contrainte-déformation, l'équation nous donne :

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}_{(k)} dz = \left(\sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{11} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}_{(k)} (z_k - z_{k-1}) \right) \begin{pmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{pmatrix}$$

Où l'exposant « 0 » est utilisé pour désigner les déformations du plan médian (rappelons que les déformations sont constantes dans l'épaisseur et peuvent être représentées par les valeurs du plan médian). L'équation peut être réécrite comme suit :

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{pmatrix}$$

Où les coefficients de la matrice A sont donnés par :

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N Q_{ij(k)} (z_k - z_{k-1})$$

Ou

$$A_{11} = A_{22} = \sum_{k=1}^N \frac{E_{(k)}}{1 - \nu_{(k)}^2} e_k, \quad A_{12} = \sum_{k=1}^N \frac{\nu_{(k)} E_{(k)}}{1 - \nu_{(k)}^2} e_k, \quad A_{66} = \sum_{k=1}^N G_{(k)} e_k$$

Où $e_k = z_k - z_{k-1}$, sont les épaisseurs de la kème couche. Pour les stratifiés isotropes considérés dans cette section, le terme A_{22} est identique au terme A_{11} . Cependant, par souci de généralité, nous gardons la représentation matricielle de A comme indiqué dans l'équation. Pour des stratifiés plus généraux constitués de couches anisotropes (telles que des couches orthotropes renforcées de fibres), ces deux termes peuvent ne pas être les mêmes. La matrice A est généralement appelée matrice de rigidité du matériau en extension (ou matrice de rigidité dans le plan) et l'équation ... est écrite en notation matricielle comme :

$$N = A\varepsilon^0$$

Une fois la matrice de rigidité dans le plan déterminée, les constantes d'ingénierie efficaces d'un stratifié peuvent être obtenues en reliant la contrainte moyenne dans le stratifié à la déformation :

$$\begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_x \\ \bar{\sigma}_y \\ \bar{\tau}_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{h} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix}$$

L'équation... a une forme identique à la relation contrainte-déformation de l'équation... ; par conséquent, en remplaçant les propriétés élastiques dans l'équation... par des propriétés effectives inconnues, E_{eff} et ν_{eff} , nous pouvons écrire les deux équations suivantes en fonction des deux inconnues pour les propriétés effectives :

$$\frac{E_{eff}}{1 - \nu_{eff}^2} = \frac{A_{11}}{h} \text{ et } \frac{\nu_{eff} E_{eff}}{1 - \nu_{eff}^2} = \frac{A_{12}}{h}$$

Qui rapporte

$$E_{eff} = \frac{1}{h} \left(\frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{22}} \right) \text{ et } \nu_{eff} = \frac{A_{12}}{A_{22}}$$

Le module de cisaillement effectif s'obtient simplement comme :

$$G_{eff} = \frac{A_{66}}{h}$$

- **Comportement en flexion (déformation en flexion d'un stratifié de couches isotropiques :**

En plus des charges dans le plan, les plaques stratifiées sont souvent chargées par des forces qui plient le stratifié. Cet état de déformation important est mieux étudié en isolant les charges, de sorte que seule une déformation en flexion pure de la ou des couches soit présente sans déformations dans le plan au niveau du plan médian. Pour la flexion des stratifiés, nous invoquons les hypothèses classiques de Kirchhoff-Love de flexion pure. Une hypothèse est qu'une ligne droite perpendiculaire au plan médian avant déformation reste droite et perpendiculaire à celui-ci. Une deuxième hypothèse est que la longueur de cette ligne reste inchangée.

L'hypothèse d'une longueur invariable des normales au plan médian de l'hypothèse de Kirchhoff implique que les déformations à travers l'épaisseur dans le stratifié sont nulles. Autrement dit, les déformations dans la direction hors du plan z sont négligées et le déplacement w est constant à travers l'épaisseur. La ou les couches sont également minces par rapport aux dimensions dans le plan de la ou des couches, et les composantes de contrainte dans la direction z sont supposées être négligeables de sorte qu'un état approximatif de contrainte plane prévaut. Les hypothèses invoquées dans cette section, ainsi que l'hypothèse de couches parfaitement liées (avec des agents de liaison indéformables infiniment minces) constituent la théorie classique de la stratification ou CLT.

Notez, cependant, que l'hypothèse de contrainte plane ne limite pas la déformation ε_z à être petite. En fait, l'amplitude de ε_z peut être comparable aux déformations dans le plan. Par conséquent, l'hypothèse de déformation nulle à travers l'épaisseur de l'hypothèse de Kirchhoff est incompatible avec l'hypothèse de contrainte plane. Malgré cette incohérence, les hypothèses de la théorie classique du stratifié fournissent une base pour de nombreuses analyses publiées dans la littérature technique et se sont révélées adéquates pour la plupart des applications d'ingénierie.

- Réponse en flexion d'une seule couche

L'effet cumulatif des hypothèses de Kirchhoff-Love peut être mieux décrit par l'étude de la figure ci-dessous.

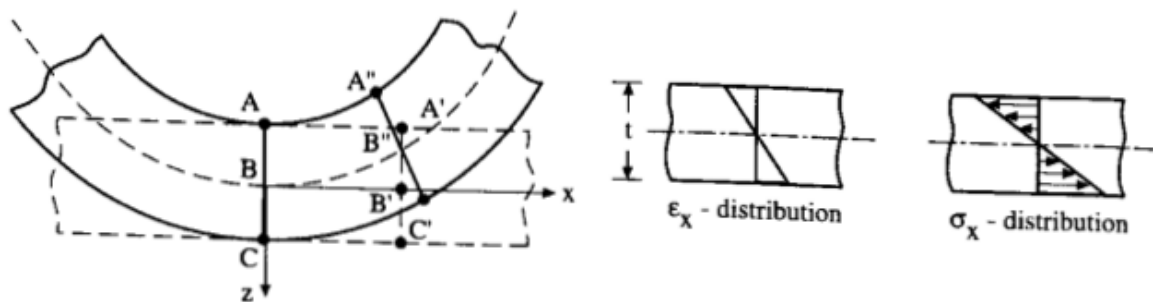


Figure 3.3 : Déformations de flexion d'une seule couche

Dans cette figure, les lignes pointillées désignent la configuration non déformée et la ligne continue celle déformée, de sorte que les points A' , B' et C' se déplacent après déformations vers les positions A'' , B'' et C'' . Puisqu'il n'y a pas de déformations dans le plan du plan médian, la longueur de la ligne non déformée BB' reste inchangée dans les positions déformées comme indiqué par BB'' . Mais si le point d'intérêt est soit en dessous (direction z positive) soit au-dessus du plan médian de la couche, il y aura un allongement ou un raccourcissement du

segment de ligne le long de l'axe x . Par exemple, la ligne AA' se raccourcira, indiquant des déformations de compression à $z = -e/2$. Les valeurs de déformation aux points $z \neq 0$ peuvent être obtenues à partir de la rotation du segment de droite $A'B'C'$. le déplacement d'un point le long de l'axe x , noté u , à n'importe quel emplacement z est lié à la pente par :

$$u = -z\theta_x = -z \frac{\partial w}{\partial x}$$

À partir de la relation déformation-déplacement,

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, & \gamma_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, & \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \end{aligned}$$

Nous avons :

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

La négative de la dérivée seconde du déplacement hors plan est une approximation de la courbure de la couche dans le plan x - z et est notée par κ_x , de sorte que $\epsilon_x = z\kappa_x$. Nous pouvons obtenir des expressions similaires pour les deux autres déformations et écrire en représentation vectorielle :

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{où} \quad \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \end{Bmatrix}$$

Contrairement au cas de déformation dans le plan, où la déformation dans une couche est constante, il est clair que la distribution de déformation est une fonction linéaire de z avec $\epsilon_x(z=0) = 0$ [antisymétrique par rapport au plan médian $\epsilon_x(z) = -\epsilon_x(-z)$] et, par conséquent, les déformations du plan médian ne peuvent pas être utilisées pour représenter la réponse de la couche en flexion pure. Parce que w est constant à travers l'épaisseur, les courbures sont également constantes à travers l'épaisseur et sont utilisées dans un rôle similaire aux déformations du plan médian pour représenter la déformation d'une couche.

Les contraintes correspondant à ces déformations ne sont pas constantes même pour une seule couche et peuvent être calculées à partir de :

$$\sigma_{(k)} = Q_{(k)} \varepsilon^0$$

Les déformations étant antisymétriques par rapport au plan médian de la couche, les contraintes sont également antisymétriques ; c'est-à-dire $\sigma_x(z) = -\sigma_x(-z)$. On cherche une grandeur qui serait représentative des contraintes de la couche, mais l'intégrale dans l'épaisseur des contraintes dans le plan est nulle (la couche est en flexion pure). Dans ce cas, les grandeurs représentatives des contraintes d'une couche sont choisies comme étant des moments des contraintes par rapport au plan médian de la couche. Nous définissons les résultantes de moment (parfois appelées couples de contraintes) par :

$$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} z \, dz$$

Où h est l'épaisseur de la couche. En substituant les expressions des composantes de contrainte en termes de déformations de

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}$$

Et en utilisant les relations déformation-courbure

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \begin{pmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \end{pmatrix}$$

On a

$$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} z \, dz = \left(Q \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \, dz \right) \begin{pmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{pmatrix}$$

Après intégration, nous définissons la matrice qui relie les courbures aux moments résultants comme la matrice de rigidité en flexion du matériau, D ,

$$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{pmatrix}$$

Où en notation matricielle,

$$\mathbf{M} = \mathbf{D}\boldsymbol{\kappa}$$

Où les éléments du $\mathbf{D}$ pour le cas isotrope monocouche sont donnés par

$$D_{11} = D_{22} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, D_{12} = \nu D_{11} \text{ et } D_{66} = (1-\nu) \frac{D_{11}}{2}$$

Pour les stratifiés isotropes considérés dans cette section, $Q_{11} = Q_{22}$ et, par conséquent, $D_{11} = D_{22}$. Cependant, par souci de généralité, nous gardons la représentation matricielle de $\mathbf{D}$ comme indiqué dans

$$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{pmatrix}$$

Réponse en flexion des couches laminées symétriquement

Pour plusieurs couches de matériau isotrope empilées symétriquement par rapport au plan médian du stratifié, les hypothèses décrites pour les plaques stratifiées sous charges dans le plan et les hypothèses pour une seule couche en flexion sont combinées. C'est-à-dire que les couches du stratifié sont parfaitement liées entre elles et se déforment de manière à ce que les lignes droites normales au plan médian restent droites et normales sans changer leur longueur. Par conséquent, suivant l'équation

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \begin{pmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \end{pmatrix}$$

La répartition dans l'épaisseur des contraintes de flexion reste linéaire. La courbure est toujours indépendante de l'emplacement dans l'épaisseur du stratifié et peut être utilisée comme quantité représentative de la déformation en flexion du stratifié. Les contraintes peuvent également être représentées par les résultantes de moment introduites pour une seule couche. Cependant, dans le cas d'un milieu stratifié en flexion, les contraintes non seulement varient linéairement dans l'épaisseur mais font aussi des sauts discrets aux interfaces des couches ; voir figure.

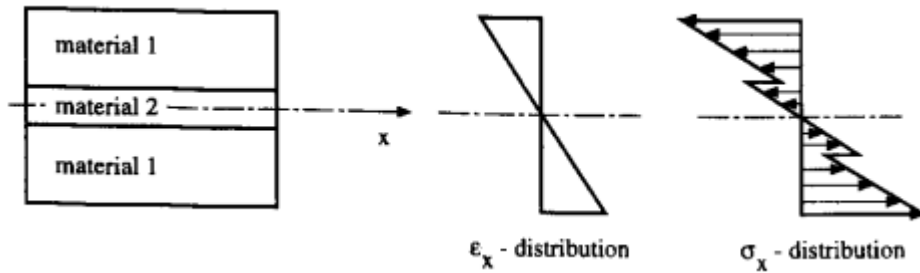


Figure 3.4 : Déformations et contraintes de flexion dans les couches stratifiées

Ces sauts sont le résultat du changement des propriétés des matériaux d'une couche à l'autre et sont régis par l'équation $\sigma = Q\varepsilon$.

L'intégration dans l'épaisseur des contraintes pour établir le moment résultant implique une sommation

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z \, dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_{(k)} z \, dz$$

La substitution de la relation contrainte-déformation et des relations déformation-courbure dans cette dernière équation donne

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N Q_{(k)} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}_{(k)} z \, dz = \underbrace{\left(\sum_{k=1}^N Q_{(k)} \int_{z_{k-1}}^{z_k} z^2 \, dz \right)}_{D_{ij}} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}$$

Après intégration, la relation moment-courbure du stratifié peut être réorganisée pour l'exprimer sous forme matricielle où les coefficients de flexion de la matrice D sont maintenant définis par

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N Q_{ij(k)} (z_k^3 - z_{k-1}^3)$$

substituant les déformations de

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{où} \quad \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \end{Bmatrix}$$

qui sont linéaires en termes de courbures, dans la définition des résultantes de contrainte dans le plan, nous avons

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \mathbf{Q}_{(k)} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}_{(k)} dz = \underbrace{\left(\sum_{k=1}^N \mathbf{Q}_{(k)} \int_{z_{k-1}}^{z_k} z dz \right)}_{\mathbf{B}_{ij}} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}$$

Puisque les $Q_{(k)}$ sont symétriques par rapport au plan médian, la somme à l'intérieur de la grande parenthèse peut être montrée comme étant nulle. Donc, dans ce cas, les résultantes de contrainte dans le plan sont nulles.

Couplage flexion-extension de couches laminées antisymétriques

Pour les stratifiés symétriques considérés jusqu'ici, la séquence de couches d'un côté du plan médian est l'image miroir de celles de l'autre côté. Les charges dans le plan pour une telle configuration produisent des déformations constantes dans l'épaisseur et des contraintes constantes dans chaque couche mais changeant d'une couche à l'autre. Les résultantes de moment sont nulles sous des charges dans le plan. Dans le cas des déformations en flexion pure, d'autre part, les distributions de déformation et de contrainte dans l'épaisseur sont toutes deux linéaires (les contraintes sont linéaires pièce par pièce) et sont distribuées de manière asymétrique par rapport au plan médian du stratifié. Dans ce cas, les intégrales des composantes de contrainte, définies comme étant les résultantes de contrainte, sont nulles en raison de la symétrie.

La réponse des stratifiés asymétriques aux charges dans le plan et à la flexion pure est sensiblement différente. Comme nous le verrons dans ce qui suit, l'application de charges dans le plan produit des déformations de flexion ainsi que des déformations dans le plan. Inversement, l'application de charges ou de moments de flexion génère des déformations dans le plan ainsi que des déformations de flexion.

Considérons d'abord, par exemple, un stratifié asymétrique à deux matériaux soumis à un moment fléchissant M qui génère des courbures κ ; voir figure ci-dessous. Supposons également que les déformations du plan médian du stratifié dans le plan, ε^0 sont supprimées pour être nulles en ajustant la charge P . Sur la base des hypothèses de Kirchhoff-Love, la distribution à travers l'épaisseur des déformations est linéaire et, parce que $\varepsilon^0 = 0$, est antisymétrique par rapport au plan médian. Les contraintes correspondantes sont également réparties linéairement dans chaque couche, mais leurs amplitudes, régies par les propriétés de rigidité des couches individuelles, sont réparties de manière asymétrique par rapport au plan médian. Contrairement à la flexion pure des stratifiés symétriques,

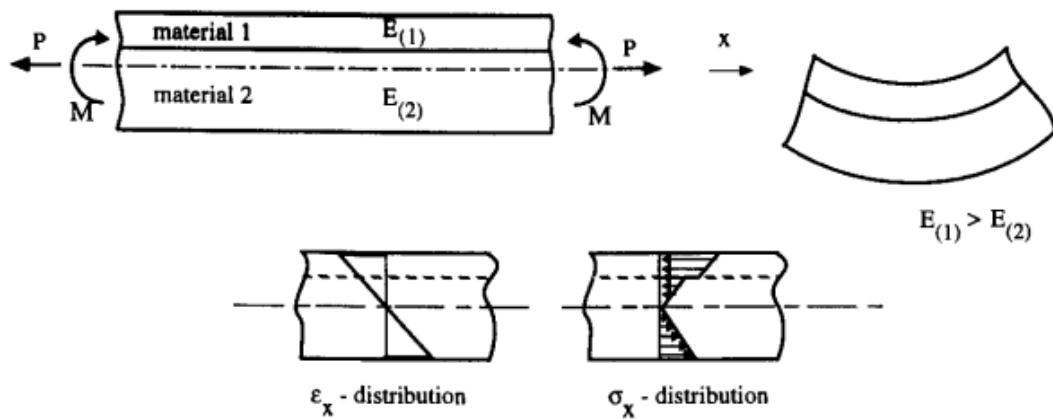


Figure 3.5 : Distribution des contraintes et déformations dans un stratifié asymétrique

Lorsque les résultantes de contrainte dans le plan sont nulles, les intégrations à travers l'épaisseur des contraintes peuvent ne pas disparaître et peuvent indiquer des résultantes de contrainte dans le plan non nulles. Pour un stratifié plus général à N couches, ces résultantes de contraintes dans le plan sont données par

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_{(k)} dz$$

Substituting the stress-strain equation

$$\sigma = Q\varepsilon$$

and the strain-curvature relations

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{où} \quad \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \end{Bmatrix}$$

dans

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \left(\sum_{k=1}^N Q_{(k)} \int_{z_{k-1}}^{z_k} z dz \right) \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{11} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}$$

Où les composantes de la matrice **B** sont données par

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N Q_{ij(k)} (z_k^2 - z_{k-1}^2)$$

La matrice **B** est appelée **matrice de couplage** et l'équation est représentée en notation matricielle comme

$$\mathbf{N} = \mathbf{B}\boldsymbol{\kappa}$$

Notez que les déformations dans le plan sont supposées être supprimées à ce stade, et l'implication de l'équation ci-dessus est que tout type de courbure est également associé à des résultantes de contrainte dans le plan. À partir de l'équilibre dans le plan, le résultat net de ces résultantes de contrainte dans le plan au bord du stratifié est égal à la charge appliquée P. Inversement, toute résultante de contrainte dans le plan induite par les charges de bord induira une courbure.

Le couplage entre la réponse dans le plan et hors du plan d'un stratifié asymétrique a un élément supplémentaire. Dans un cas plus général, les déformations dans le plan au niveau du plan médian du stratifié ne disparaîtront pas sous le moment de flexion pur. Afin de visualiser cela, considérez la couche supérieure de la figure précédente et supposez qu'elle est très mince par rapport à l'épaisseur globale du stratifié et qu'elle a une rigidité dans le plan infiniment

grande, de sorte qu'elle ne peut subir aucune déformation dans le plan. Pour ce stratifié, les déformations de flexion entraîneraient une déformation nulle à la surface supérieure du stratifié (en raison de la rigidité infinie dans le plan) et des déformations finies au plan médian du stratifié induites par la courbure. Pour des stratifiés asymétriques plus réalistes, la distribution réelle des contraintes est une combinaison de contraintes de flexion pures avec une valeur de plan médian nulle et de la contrainte de plan médian finie due à l'asymétrie de la rigidité dans le plan des couches. Cela peut être incorporé dans l'équation

$$N = B\kappa$$

Facilement en ajoutant la relation entre les déformations dans le plan et les contraintes dans le plan résultant de l'équation

$$N = A\varepsilon^0$$

On obtient

$$N = B\kappa + A\varepsilon^0$$

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{11} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix}$$

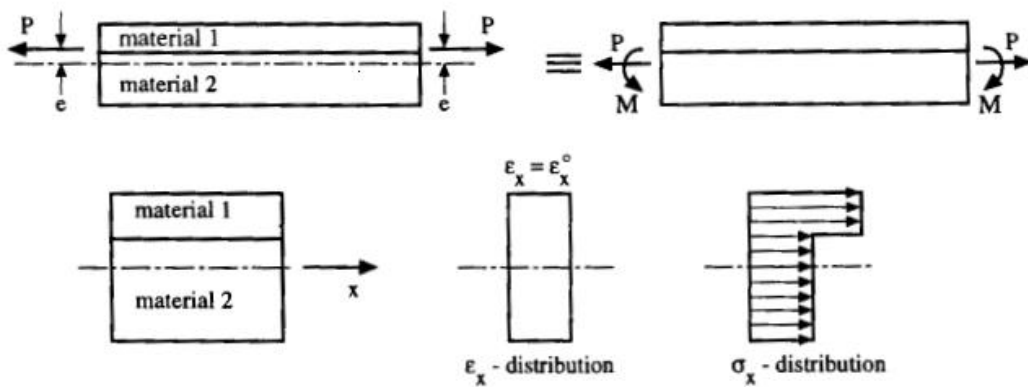


Figure 3.6 : Stratifié asymétrique sous l'état de déformation dans le plan.

Ensuite, considérons un cas où nous soumettons le stratifié asymétrique à des déformations dans le plan uniquement en supprimant les courbures. Ceci peut être réalisé en plaçant le stratifié entre deux parois rigides pour supprimer les courbures et en appliquant une

charge dans le plan au niveau du plan médian du stratifié. Même si la distribution à travers l'épaisseur des déformations représentées par les déformations du plan médian ε^0 est constante et que les contraintes dans chaque couche sont constantes, le profil asymétrique des contraintes génère des résultantes de moment autour du plan médian du stratifié. A partir de la définition des moments résultants

$$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}_{(k)} z dz = \sum_{k=1}^N Q_{(k)} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}_{(k)} z dz = \underbrace{\left(\sum_{k=1}^N Q_{(k)} \int_{z_{k-1}}^{z_k} z^2 dz \right)}_{D_{ij}} \begin{pmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{pmatrix}$$

On utilise le fait que les déformations sont constantes pour obtenir

$$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^N Q_{(k)} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{pmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{pmatrix}_{(k)} z dz = \left(\sum_{k=1}^N Q_{(k)} \int_{z_{k-1}}^{z_k} z dz \right) \begin{pmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{pmatrix}$$

Notez que les termes matriciels devant le vecteur de déformation sont les mêmes que ceux obtenus précédemment pour la flexion pure. Par conséquent, la relation entre les résultantes de moment et les composantes de déformation dans le plan est représentée par

$$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{11} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{pmatrix}$$

Ou sous la notation matricielle

$$\mathbf{M} = \mathbf{B} \boldsymbol{\varepsilon}^0$$

L'équation suggère que sous des déformations pures dans le plan, des résultantes de moment interne sont générées. En effet, ces résultantes de moment sont le résultat d'actions externes qui maintiennent le stratifié dans des configurations d'équilibre plat. Une autre façon d'induire des déformations dans le plan sans courber le stratifié consiste à appliquer des charges dans le plan avec une excentricité par rapport au plan médian du stratifié. Ainsi, un ε^0 et zéro κ donnés peuvent être obtenus en appliquant une charge dans le plan de $\mathbf{N} = \mathbf{A} \boldsymbol{\varepsilon}^0$ et un moment de flexion $\mathbf{M} = \mathbf{B} \boldsymbol{\varepsilon}^0$.

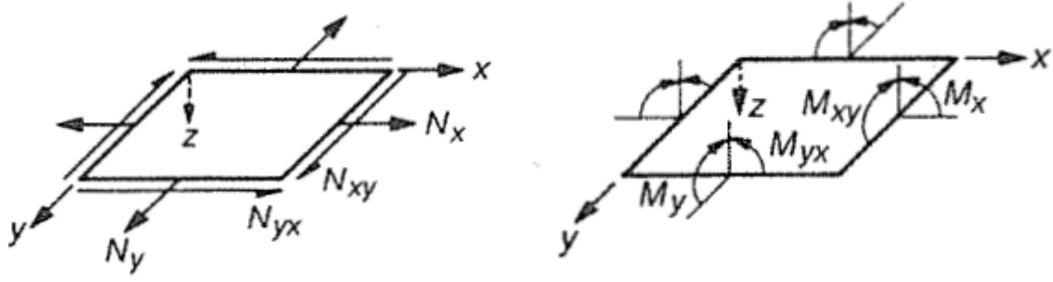


Figure 3.7 : Convention de signe pour les forces et moments résultants (toutes les forces et tous les moments indiqués sont positifs).

Notez que différentes excentricités peuvent être nécessaires pour différents composants des charges dans le plan. Inversement, si les moments de flexion externes sont appliqués sans charges dans le plan, l'équation $\mathbf{M} = \mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon}^0$ suggère que des déformations dans le plan en résulteraient. Étant donné que les moments de flexion appliqués provoquent également des courbures comme indiqué par l'équation $\mathbf{M} = \mathbf{D}\boldsymbol{\kappa}$, l'état de déformation résultant est une combinaison des déformations dans le plan et de flexion régies par

$$\mathbf{M} = \mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon}^0 + \mathbf{D}\boldsymbol{\kappa}$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{11} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{11} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}$$

Il est important de noter, cependant, que pour un moment de flexion appliqué donné seul n'est pas suffisant pour résoudre l'état de déformation. Il existe deux ensembles d'inconnues, $\boldsymbol{\varepsilon}^0$ et $\boldsymbol{\kappa}$, mais un seul ensemble d'équations. Le deuxième ensemble d'équations est $\mathbf{N} = \mathbf{B}\boldsymbol{\kappa} + \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}^0$ et, par conséquent, la solution dépend également des résultantes de contrainte dans le plan. Si les résultantes de contrainte dans le plan sont nulles, cette équation peut être utilisée pour résoudre les courbures en termes de déformations dans le plan (ou courbures).

Un autre cas facile est lorsque le chargement dans le plan est au plan médian sans moments appliqués ($\mathbf{M} = \mathbf{0}$). Dans ce cas, un stratifié asymétrique doit se plier. Puisque les résultantes de moment sont nulles, la courbure peut être calculée à partir de $\mathbf{M} = \mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon}^0 + \mathbf{D}\boldsymbol{\kappa}$ comme

$$\boldsymbol{\kappa} = -\mathbf{D}^{-1}\mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon}^0$$

Connaissant les courbures en termes de déformations dans le plan, on peut résoudre $\mathbf{N} = \mathbf{B}\boldsymbol{\kappa} + \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}^0$ pour les résultantes de contrainte dans le plan étant donné les déformations dans le plan ou les déformations dans le plan pour les résultantes de contrainte dans le plan.

Enfin, dans le cas plus général où $\mathbf{N} \neq \mathbf{0}$ et $\mathbf{M} \neq \mathbf{0}$, les équations :

$$\mathbf{N} = \mathbf{B}\boldsymbol{\kappa} + \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}^0$$

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{11} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{pmatrix}$$

Et

$$\mathbf{M} = \mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon}^0 + \mathbf{D}\boldsymbol{\kappa}$$

$$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{11} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{11} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{pmatrix}$$

doivent être résolues simultanément.