



-2021/2022-

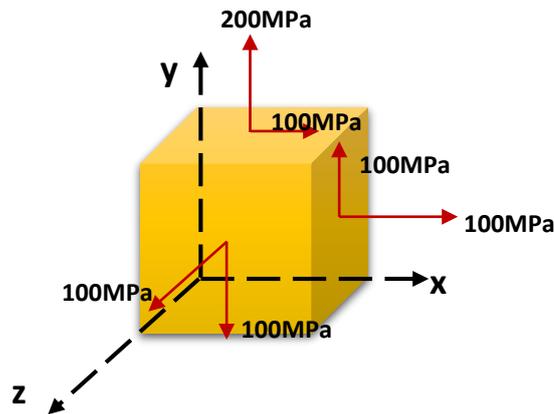
Comportement Mécanique des Matériaux Composites et Multi-
Matériaux

-S2- MI GM

Corrigé TD N°1

Exercice 1 :

- Ecrire la matrice des contraintes en P dans le repère (xyz).



Solution 1

$$[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} 100 & 100 & 0 \\ 100 & 200 & -100 \\ 0 & -100 & 100 \end{bmatrix}$$

Exercice 2 :

En un point M d'un solide, dans le repère orthonormé $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, le tenseur des contraintes a pour valeur :

$$[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} 100 & -40 & 0 \\ -40 & 80 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

1. Faire un dessin qui montre la signification physique des composantes du tenseur des contraintes.
2. Soit le vecteur unitaire \vec{n} de composantes :

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sur la facette \vec{n} :

- (a) Calculer les composantes du vecteur contrainte $\vec{T}(M, \vec{n})$.
 - (b) Calculer la contrainte normale σ_n .
 - (c) Calculer les composantes du vecteur cisaillement $\vec{\tau}_n$, puis le module τ_n du cisaillement.
 - (d) Faire un dessin qui montre la facette, le vecteur contrainte, la contrainte normale et le vecteur cisaillement.
3. Calculer les contraintes et les directions principales.
 4. Faire un dessin qui montre la signification physique des contraintes et des directions principales.
 5. Calculer les contraintes équivalentes de Von Mises et Tresca.

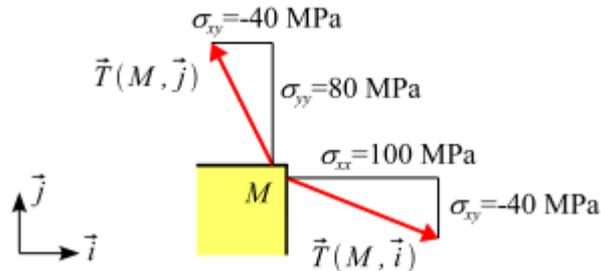
Solution 2

1. Les composantes en MPa du tenseur des contraintes dans le repère orthonormé $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$:

$$\vec{T}(M, \vec{i}) \quad \vec{T}(M, \vec{j}) \quad \vec{T}(M, \vec{k})$$

$$\begin{cases} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{cases} \begin{bmatrix} 100 & -40 & 0 \\ -40 & 80 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sont représentées sur la figure ci-dessous :



2. Facette \vec{n}

a) Les composantes du vecteur contrainte sont (formule de Cauchy :

$$\{T(M, \vec{n})\} = [\sigma(M)] \{n\}$$

$$\begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 & -40 & 0 \\ -40 & 80 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{Bmatrix} 20 \\ 120 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 8.94 \\ 53.67 \\ 0 \end{Bmatrix} MPa$$

b) On en déduit la contrainte normale $\sigma_n = \vec{n} \cdot \vec{T}(M, \vec{n})$

$$\sigma_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \{1 \quad 2 \quad 0\} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{Bmatrix} 20 \\ 120 \\ 0 \end{Bmatrix} = 52 MPa$$

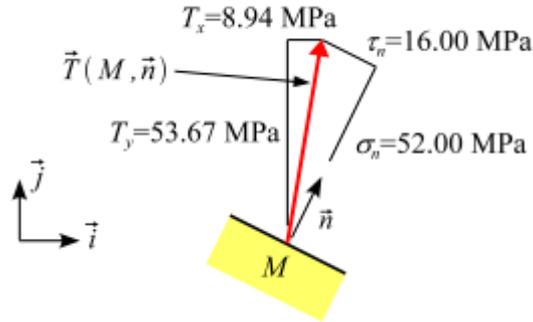
c) Le vecteur de cisaillement ($\vec{\tau}_n = \vec{T}(M, \vec{n}) - \sigma_n \cdot \vec{n}$) :

$$\begin{Bmatrix} \tau_{nx} \\ \tau_{ny} \\ \tau_{nz} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{Bmatrix} 20 \\ 120 \\ 0 \end{Bmatrix} - 52 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{Bmatrix} -32 \\ 16 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -14.31 \\ 7.16 \\ 0 \end{Bmatrix} MPa$$

et le module du cisaillement :

$$\tau_n = \|\vec{\tau}_n\| = \sqrt{\frac{1}{5} (32^2 + 16^2)} = 16 MPa$$

d) Le vecteur contrainte $\vec{T}(M, \vec{n})$, la contrainte normale σ_n et le cisaillement τ_n sont représentées sur la figure ci-dessous.



3. Contraintes et directions principales

L'axe \vec{k} est direction principale :

$$\vec{n}_3 = \vec{k}, \quad \sigma_3 = 0$$

Les contraintes principales σ_1 et σ_2 sont les solutions de l'équation ($\det([\sigma] - \sigma_n[I]) = 0$)

$$\det \begin{vmatrix} 100 - \sigma_n & -40 \\ -40 & 80 - \sigma_n \end{vmatrix} = (100 - \sigma_n)(80 - \sigma_n) - (-40)^2 = \sigma_n^2 - 180\sigma_n + 6400 = 0$$

D'où :

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_1 = \frac{180}{2} + \sqrt{\left(\frac{140}{2}\right)^2 + (-40)^2} = 131.23 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_2 = \frac{180}{2} - \sqrt{\left(\frac{140}{2}\right)^2 + (-40)^2} = 48.77 \text{ MPa}$$

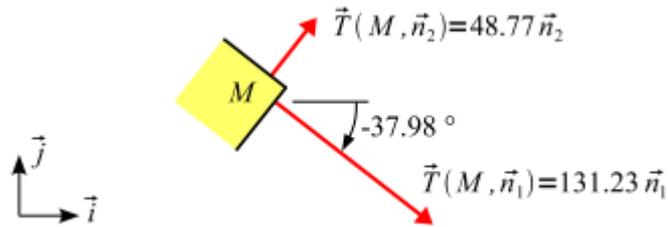
La position angulaire des directions principales \vec{n}_1 et \vec{n}_2 est définie par :

$$\tan 2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} = \frac{-80}{20} = -4$$

D'où

$$\theta = -37.98^\circ$$

4. Les contraintes et directions principales sont représentées sur la figure ci-dessous.



Dans le repère principal, le tenseur des contraintes s'écrit :

$$[\sigma(M)]_{\{M, \vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3\}} = \begin{bmatrix} 131.23 & 0 & 0 \\ 0 & 48.77 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} MPa$$

Exercice 3 :

$$\begin{cases} \sigma_x = -2x^2 + 3y^2 - 5z & ; & \tau_{xy} = z + 4xy - 7 \\ \sigma_y = -2y^2 & & ; & \tau_{xz} = -3x + y + 1 \\ \sigma_z = 3x + y + 3z - 5 & ; & \tau_{yz} = 0 \end{cases}$$

Définir les forces de volume à l'équilibre statique

L'équilibre est donné par l'équation suivante :

Solution 3 :

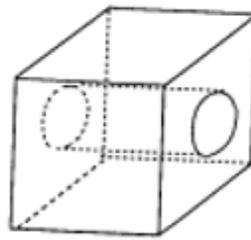
$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x = 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y = 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4x + 4x + 0 + f_x = 0 \\ 4y - 4y + 0 + f_y = 0 \\ -3 + 0 + 3 + f_z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \\ f_z = 0 \end{cases}$$

Exercice 4 :

Le module d'élasticité et la masse volumique d'une fibre de graphite et d'une résine époxy typiques sont $E_f = 230 \text{ GPa}$, $\rho_f = 17,2 \text{ kN/m}^3$ et $E_m = 3,45 \text{ GPa}$, $\rho_m = 12,0 \text{ kN/m}^3$, respectivement. En supposant que le tassement des fibres soit représenté par le volume unitaire indiqué sur la figure, tracez le module spécifique longitudinal, E_1/ρ_c , et le module spécifique transversal, E_2/ρ_c , en fonction de la fraction volumique de fibres $0 \leq V_f \leq V_f^{max}$ pour un unidirectionnel système composite Graphite/Epoxy renforcé de fibres où la valeur maximale du rayon de la fibre est égal à la moitié du bord unitaire du volume.



volume unitaire

Notez que ρ_c est la masse volumique du matériau composite.

Solution 4

Nous exprimons d'abord les modules spécifiques dans les directions longitudinale et transversale E_1 , E_2 , et ρ_c , en termes de fraction volumique de fibres.

De l'équation, le module longitudinal et la fraction volumique sont

$$E_1 = E_f V_f + E_m V_m = E_f V_f + E_m (1 - V_f)$$

$$E_1 = 3.45 + 226.55 V_f \text{ GPa}$$

$$\rho_c = \rho_f V_f + \rho_m (1 - V_f)$$

$$\rho_c = 12.0 + 5.2 V_f \text{ kN/m}^3$$

Et du module transverse est :

$$\frac{1}{E_2} = \frac{V_f}{E_f} + \frac{V_m}{E_m}$$

$$\frac{1}{E_2} = \frac{V_f E_m + V_m E_f}{E_f E_m}$$

$$E_2 = \frac{E_f E_m}{V_f E_m + V_m E_f}$$

$$E_2 = \frac{E_f E_m}{V_f E_m + (1 - V_f) E_f}$$

$$E_2 = \frac{793.5}{230 - 226.55 V_f} \text{ GPa}$$

Les rigidités spécifiques sont obtenues par :

$$\frac{E_1}{\rho} = \frac{(3.45 + 226.55 V_f)}{12.0 - 5.2 V_f} m$$

$$\frac{E_2}{\rho} = \frac{7.935 * 10^5}{2.76 - 1.5226 V_f - 1.17806 V_f^2} m$$

La fraction volumique de fibres peut varier de zéro à la valeur maximale de V_f^{max} , où la valeur maximale est déterminée à partir de la géométrie de garnissage de fibres fournie dans la figure, le rayon de fibre maximal possible est égal à la moitié du bord unitaire du volume.

Donc,

$$V_f^{max} = \pi * 0.5^2 = 0.7854$$

Il apparait que le meilleur matériau est celui qui possède la valeur de E/ρ la plus élevée, conduisant à la valeur de rigidité la plus élevée. Le terme E/ρ est appelé le module spécifique de Young du matériau.

$$\frac{E_m}{\rho_m} = 276 * 10^3 m$$

$$\frac{E_f}{\rho_f} = 13.37 * 10^6 m$$

La rigidité spécifique longitudinale du composite (E_1/ρ) normalisée par la rigidité spécifique fibre ($E_f/\rho_f = 13.37 * 10^6 m$), et la rigidité spécifique transversale (E_2/ρ) normalisée par la rigidité spécifique matrice ($E_m/\rho_m = 276 km$)

Solution exercice de perfectionnement

Nous exprimons les modules de rigidité dans les directions longitudinale et transversale E_1 , E_2 , et ρ_c , en termes de fraction volumique de fibres.

Les modules de rigidité sont donnés par :

$$E_1 = E_f V_f + E_m (1 - V_f) = 3.45 + 120.55 V_f \text{ (GPa)}$$

$$E_2 = \frac{E_f E_m}{E_m V_f + E_f (1 - V_f)} = \frac{428.8}{124 - 120.55 V_f} \text{ (GPa)}$$

Les coefficients de raideurs longitudinal et transversal, respectivement E_1 et E_2 , imposent que:

$$E_1 \geq 0.2 E_f \quad \text{and} \quad E_2 \geq 0.15 E_f$$

En utilisant la formulation standard d'une optimisation, nous posons le problème sous la forme suivante :

Minimiser :

$$f(V_f) = 12 + 2.1 V_f \text{ (kN/m}^3\text{)}$$

Tel que

$$g_1(V_f) = 0.2 - \frac{E_1}{E_f} \text{ ou } 21.35 - 120.55 V_f \leq 0$$

$$g_2(V_f) = 0.15 - \frac{E_2}{E_f} \text{ ou } \frac{180.83 V_f - 180.83 V_f^2 - 30.16}{V_f - 10.29} \leq 0$$

$$0 \leq V_f \leq V_f^{max}$$

Où $V_f^{max} = 0.7854$

Étant donné que la masse volumique du composite augmente linéairement avec la fraction volumique des fibres, le poids le plus faible serait obtenu en réduisant le V_f à zéro. Cependant, un matériau entièrement époxy ne satisferait pas à l'exigence que le module longitudinal soit supérieur à 20 % du module des fibres.