

Chapitre 1. Introduction (2 Semaines)

1. Objectifs de ce cours : Ce chapitre a pour objectif de présenter un rappel de quelques notions fondamentales sur les systèmes dynamiques et certains outils mathématiques indispensables pour la compréhension du reste de cours.

2. Rappel sur le calcul matriciel :

Matrice

Une matrice de dimensions $n \times m$ (notée $A_{n \times m}$) est un tableau de nombres à n lignes et m colonnes. Les nombres qui composent la matrice (a_{ij} , où $i = 1 \dots n, j = 1 \dots m$) sont appelés éléments ou coefficients de la matrice.

$$A_{n \times m} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Matrice ligne

Une matrice ligne $1 \times m$ est une matrice ayant une seule ligne et m colonnes.

$$A_{1 \times m} = [a_{11} \quad \dots \quad a_{1m}]$$

Matrice colonne

Une matrice colonne $n \times 1$ est une matrice ayant une seule colonne et n lignes.

$$A_{n \times 1} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}$$

Matrice carrée

Une matrice carrée est une matrice qui possède le même nombre de lignes et de colonnes (c.-à-d. $n = m$)

Diagonale d'une matrice

La diagonale principale (ou simplement la diagonale) d'une matrice est l'ensemble des éléments a_{ii} de la matrice A .

2- Opérations élémentaires sur les matrices

Addition de deux matrices

On ne peut additionner ou soustraire que deux matrices de même dimension. Soient deux matrices A et B de même dimension.

- Addition : $C = A + B$ où $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$
- Soustraction : $D = A - B$ où $d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$

Transposée d'une matrice

On appelle transposée d'une matrice A de dimension $n \times m$ la matrice notée A^T de dimension $m \times n$ obtenue en permettant les lignes et les colonnes

$$A_{n \times m} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

La transposée de A est :

$$A_{m \times n} = [a_{ji}] = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Multiplication d'une matrice par un scalaire

Le produit d'une matrice par un scalaire est la matrice obtenue en multipliant chaque élément de la matrice par ce scalaire.

Multiplication de deux matrices

La multiplication de deux matrices A et B n'est possible que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B . La matrice obtenue C est une matrice possédant le même nombre de lignes de la matrice A et le même nombre de colonnes de la matrice B .

$$C_{n \times p} = A_{n \times m} \times B_{m \times p}$$

Exemple 1.3 : soient deux matrices A et B .

$$A_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}, \quad B_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}, \quad C_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

Avec :

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31}, \quad c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32}, \\ c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31}, \quad c_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32}.$$

Trace d'une matrice

La trace d'une matrice est la somme des éléments de la diagonale principale de la matrice ($\sum a_{ii}$).

Déterminant d'une matrice d'ordre 2

Soit A une matrice carrée d'ordre 2.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Le déterminant de A noté **det** (A) se calcule de la manière suivante :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

3.5 Mineurs

Le mineur M_{ij} est le déterminant de la matrice obtenue en éliminant la i^{eme} ligne et la j^{eme} colonne de A .

Exemple 1.4 : soit la matrice carrée d'ordre 3.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{22} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Cofacteur

Le cofacteur noté D_{ij} d'une matrice A est défini par la relation :

$$D_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Remarque 1.2 : Nous constatons que le mineur et le cofacteur ont la même valeur numérique, mais le signe peut être différent.

Déterminant d'une matrice d'ordre n

Soit A une matrice carrée et D_{ij} ses cofacteurs. Le déterminant est obtenu en suivant la méthode suivante :

- 1- Choisir une ligne ou une colonne de A : pour simplifier les calculs, on choisit la ligne ou la colonne contenant le plus grand nombre de zéros.
- 2- Multiplier chaque élément a_{ij} de la ligne ou la colonne choisie par le cofacteur D_{ij} correspondant
- 3- Faire la somme de ces résultats.

Matrice adjointe (comatrice)

Soit A une matrice carrée d'ordre n .

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

On appelle matrice adjointe de A , la matrice carrée d'ordre n notée $adj(A)$ définie par :

$$adj(A) = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & \dots & D_{1n} \\ D_{21} & D_{22} & \dots & D_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{n1} & D_{n2} & \dots & D_{nn} \end{bmatrix}$$

$D_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ est le cofacteur de l'élément a_{ij} .

Inverse d'une matrice

Une matrice carrée A de dimension $n \times n$ (c.-à-d. d'ordre n) est dite inversible (ou régulière ou non singulière) s'il existe une matrice B d'ordre n appelée matrice inverse de A .

$$B = A^{-1}$$

Tel que $A \times B = B \times A = I_n$ où I_n est la matrice identité d'ordre n .

La formule générale de l'inverse d'une matrice est :

Où :

$de(A) \neq 0$ est le déterminant de A .

$adj(A)$ est la matrice adjointe de A

Valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice

Si A est une matrice carrée ($n \times n$) quelconque, les n valeurs propres *distincts* de A sont notés λ_i et sont associées aux n vecteurs propres V_i par :

$$AV_i = \lambda_i V_i, i = 1 \dots n$$

Les valeurs propres de A sont les scalaires tels que:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Où I est la matrice identité d'ordre n .

Cette dernière équation fonction de λ et de degré n est dite équation caractéristique de A .

Rang d’une matrice

Le rang d’une matrice A d’ordre n est défini comme étant le nombre de lignes ou de colonnes de A qui sont linéairement indépendants.

- $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \text{rang}(A) = n$ dans ce cas A est dite de *rang plein*.
- $\det(A) = 0 \Leftrightarrow \text{rang}(A) < n$.
-

3. Rappel des notions de l’approche d’état :

Les procédés industriels au niveau des variables stratégiques sont très fréquemment multi-variables. En effet, la quasi-totalité des systèmes industriels comprenant au moins deux variables de sortie. La commande de ces procédés constitue un objet fondamental dans le domaine de l’automatique, et demande une démarche rigoureuse pour aboutir aux résultats désirés ; plusieurs techniques de commande ont été développées dans ce sens, qui ont pour but de réduire le phénomène d’interaction existant entre les variables du système.

Comme précise dans le préambule ci-avant, il s’agit de d’écrire un système en considérant sa dynamique interne et pas seulement une relation entre son entrée et sa sortie. Ainsi, il convient de « redonner de l’importance » à des grandeurs qui ne sont ni l’entrée, ni la sortie, tout en prenant en compte l’ensemble des phénomènes dynamiques et statiques qui confère au système son comportement.

4. Différence entre SISO et MIMO :

Un système physique dynamique peut être décrit par le modèle représentatif de la figure (Fig. I-1) :

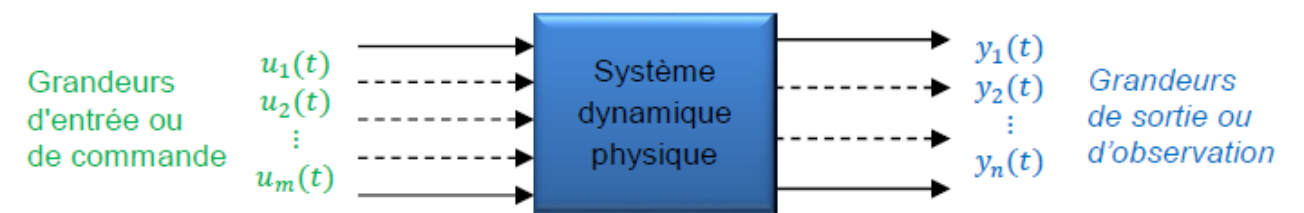


Fig. 1 : Représentation d'un système dynamique physique multi-variable

On dit qu’un système est de type *SISO* (Single Input – Single Output, ou *mono entrée – mono sortie*) lorsque le système n’est sujet qu’à une seule entrée et qu’il ne dispose que d’une seule sortie. Dans tous les autres cas, il est de type *MIMO* (Multi Input – Multi Output, ou *multivariables*) (Fig. 2).

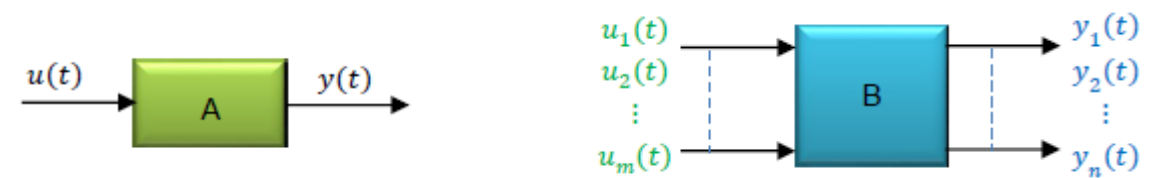


Fig. 2 : Système SISO et système MIMO

Système déterministe

Si pour chaque entrée (t) , il n'existe qu'une sortie possible (t) , alors le système est dit déterministe. Au contraire, dans un système non-déterministe ou stochastique (ou encore aléatoire), il y a plusieurs sorties possibles, chacune d'elles étant affectée d'une certaine probabilité.

Systèmes continus et systèmes échantillonnés

Un système est dit continu lorsque les variations des grandeurs physiques le caractérisant sont des fonctions du type (t) , avec t une variable continue, le temps en général. On oppose les systèmes *continus* aux systèmes *discrets* (ou *échantillonnés*), par exemple les systèmes informatiques, pour lesquels l'information n'est connue qu'à des instants discontinus.

Un système est dit discret ou échantillonné si, en un endroit au moins la chaîne des éléments le constituant, le signal n'est transmis qu'à des instants privilégiés, appelés instants d'échantillonnage.

Systèmes linéaires et systèmes non-linéaires

Quand un système est *linéaire*, il jouit de propriétés importantes qui permettent une étude plus commode, en particulier le « *principe de superposition linéaire* » qui se traduit par les relations ci-dessous.

Soient (t) et (t) les grandeurs d'entrée et de sortie d'un système quelconque A (Fig. I-3).

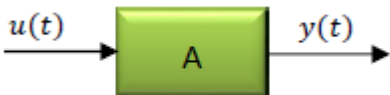


Fig. I-3 : Système dynamique quelconque A

Le système A est considéré comme étant linéaire si les relations qui lient son entrée et sa sortie vérifient les propriétés suivantes :

i) Additivité

Entrée		Sortie	
$u_1(t)$	$\rightarrow$	$y_1(t)$	
$u_2(t)$	$\rightarrow$	$y_2(t)$	
$u_1(t) + u_2(t)$	$\rightarrow$	$y_1(t) + y_2(t)$	

ii) Homogénéité

Entrée		Sortie	
$u(t)$	$\rightarrow$	$y(t)$	
$\lambda \cdot u(t)$	$\rightarrow$	$\lambda \cdot y(t)$	

iii) Principe de superposition

A partir des équations (Eq. I-1 et Eq. I-2), nous pouvons énoncer le principe de superposition comme suit, selon l'équation (Eq. I-3) :

Entrée		Sortie	
$u_1(t)$	$\rightarrow$	$y_1(t)$	
$u_2(t)$	$\rightarrow$	$y_2(t)$	
$\alpha \cdot u_1(t) + \beta \cdot u_2(t)$	$\rightarrow$	$\alpha \cdot y_1(t) + \beta \cdot y_2(t)$	

Ce principe traduit le fait que *les effets sont proportionnels aux causes* et que *les causes ajoutent leurs effets*.

Si le principe de superposition n'est pas vérifié, nous sommes, alors, en présence d'un système dit « *système non-linéaire* ».

Systèmes variants et systèmes invariants

On dit qu'un système est invariant lorsque *les caractéristiques de comportement ne se modifient pas avec le temps*. Dans le cas contraire, le système est dit « *variant* ».

Système causal

Un système est causal si la valeur de (t) à un instant t_0 , soit (t_0) , ne dépend pas des valeurs de (t) pour $t > t_0$; notons que tous les systèmes physiques sont causaux.