

Solution 01:

vérifions les conditions d'un espace vectoriel:

1) $(\mathbb{R}^2, +)$ est un groupe commutatif car:

a) "+" est interne $(x, y) + (x', y') = (x+x', y+y') \in \mathbb{R}^2$

b) "+" est associative : pour $(x, y), (x', y'), (x'', y'') \in \mathbb{R}^2$

$$[(x, y) + (x', y')] + (x'', y'') = (x+x', y+y') + (x'', y'')$$

$$= (x+x'+x'', y+y'+y'') = (x, y) + (x'+x'', y'+y'')$$

$$= (x, y) + [(x', y') + (x'', y'')]$$

c) "+" est commutative : pour $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$:

$$(x, y) + (x', y') = (x+x', y+y') = (x'+x, y'+y) = (x', y') + (x, y)$$

d) "+" admet un élément neutre : $e = (e_1, e_2)$

$$(x, y) + (e_1, e_2) = (x, y) \Rightarrow (x+e_1, y+e_2) = (x, y)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+e_1 = x \\ y+e_2 = y \end{cases} \Rightarrow e = (e_1, e_2) = (0, 0)$$

e) Tous les éléments sont symétrisables :

$$(x, y) + (x', y') = (e_1, e_2) \Rightarrow \begin{cases} x+x' = 0 \\ y+y' = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases} \Rightarrow (x', y') = (-x, -y)$$

2) a) Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$

$$Mq: \alpha \odot [(x, y) + (x', y')] \stackrel{?}{=} \alpha \odot (x, y) + \alpha \odot (x', y')$$

On a:

$$\alpha \odot [(x, y) + (x', y')] = \alpha \odot [x + x', y + y'] = (\alpha(x + x'), y + y')$$

$$= (\alpha x + \alpha x', y + y') \dots (I)$$

D'autre part:

$$\alpha \odot (x, y) + \alpha \odot (x', y') = (\alpha x, y) + (\alpha x', y')$$

$$= (\alpha x + \alpha x', y + y') \dots (II)$$

De (I) et (II) on obtient:

$$\alpha \odot [(x, y) + (x', y')] = \alpha \odot (x, y) + \alpha \odot (x', y')$$

2) b) Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$Mq: (\alpha + \beta) \odot (x, y) \stackrel{?}{=} \alpha \odot (x, y) + \beta \odot (x, y)$$

On a:

$$(\alpha + \beta) \odot (x, y) = ((\alpha + \beta)x, y) = (\alpha x + \beta x, y)$$

D'autre part:

$$\alpha \odot (x, y) + \beta \odot (x, y) = (\alpha x, y) + (\beta x, y)$$

$$= (\alpha x + \beta x, y + y) \neq (\alpha x + \beta x, y)$$

donc $(\mathbb{R}^2, +, \odot)$ n'est pas un ~~espace~~ $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Solution 02:

$$E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0 \text{ et } x+3az=0\} \mid a \in \mathbb{R}$$

* Si $a \neq 0$: $0_{\mathbb{R}^3} \notin E_1$

donc dans ce cas E_1 n'est un sous-e.v. de $\mathbb{R}^3$

* Si $a = 0$:

i) $0_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0) \in E_1$ Car : $\begin{cases} 0+0+0=0 \\ \text{et } 0+3a(0)=0 \end{cases}$

ii) Remarquons que : $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{matrix} x=0 \\ \text{et } y=0 \end{matrix}\}$
soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $X = (0, 0, \alpha), X' = (0, 0, \beta) \in E_1$

on a :

$$\alpha X + \beta X' = (0, 0, \alpha\alpha) + (0, 0, \beta\beta) = (0, 0, \alpha\alpha + \beta\beta) \in E_1$$

donc dans ce cas E_1 est un s. e.v. de $\mathbb{R}^3$.

$$E_2 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(1) = 0\}$$

E_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

En effet :

i) $0_{\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})} \in E_2$ Car : $0_{\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})}(1) = 0$

($0_{\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$: la fonction nulle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.)

ii) Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $f, g \in E_2$:

$$f \in E_2 \Rightarrow f(1) = 0 \quad , \quad g \in E_2 \Rightarrow g(1) = 0$$

D'autre part :

$$(\alpha f + \beta g)(1) = (\alpha f)(1) + (\beta g)(1) = \alpha f(1) + \beta g(1) = 0$$

donc $\alpha f + \beta g \in E_2$,

d'où E_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

$$E_3 = \{ f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / f(0) = 1 \}$$

E_3 n'est pas un sous-espace de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ car

$$0_{\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})} \notin E_3 \text{ (puisque : } 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})}(0) = 0 \neq 1 \text{)}$$

$$E_4 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / x + \alpha y + 1 \geq 0 \} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

E_4 n'est pas un sous-espace de $\mathbb{R}^2$ car :

$$\text{Pour } \begin{cases} X_1 = (-\frac{1}{2}, 0) \in E_4 & (-\frac{1}{2} + 0 + 1 = \frac{1}{2} \geq 0) \\ X_2 = (0, 0) \in E_4 & (0 + 0 + 1 \geq 0) \end{cases}$$

et $B_1 = 4$ et $B_2 = -1$, on a

$$\begin{aligned} B_1 X_1 + B_2 X_2 &= 4(-\frac{1}{2}, 0) + (-1)(0, 0) = (-2, 0) + (0, 0) \\ &= (-2, 0) \notin E_4 \end{aligned}$$

$$\text{(puisque : } -2 + 0 + 1 = -1 \not\geq 0 \text{)}$$

Solution 04 :

$$E_2 = \{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / 2x + y - z = 0 \}$$

$$i) 0_{\mathbb{R}^4} \in E_2 \text{ car : } 2(0) + (0) - (0) = 0.$$

$$ii) \text{ Soient } \alpha, B \in \mathbb{R}, X_1 = (x_1, y_1, z_1, t_1) \in E_2$$

$$X_2 = (x_2, y_2, z_2, t_2) \in E_2. \text{ Mg : } \alpha X_1 + B X_2 \stackrel{?}{\in} E_2$$

on a :

$$X_1 \in E_2 \Rightarrow 2x_1 + y_1 - z_1 = 0$$

$$X_2 \in E_2 \Rightarrow 2x_2 + y_2 - z_2 = 0$$

D'autre part :

$$\alpha X_1 + B X_2 = (\alpha x_1 + B x_2, \alpha y_1 + B y_2, \alpha z_1 + B z_2, \alpha t_1 + B t_2)$$

et on a :

$$2(\alpha x_1 + B x_2) + (\alpha y_1 + B y_2) - (\alpha z_1 + B z_2) = 0$$
$$\Rightarrow \alpha(2x_1 + y_1 - z_1) + B(2x_2 + y_2 - z_2) = 0$$

donc $\alpha X_1 + B X_2 \in E_2$, d'où E_2 est un sous-e.v de $\mathbb{R}^4$.

* Trouvons une base de E_2 :

a) Trouvons la partie génératrice de E_2 :

$$\text{Soit } X = (x, y, z, t) \in E_2 \text{ donc : } 2x + y - z = 0$$

$$\Rightarrow y = -2x + z$$

D'autre part :

$$X = (x, y, z, t) = (x, -2x + z, z, t) = x(1, -2, 0, 0) + z(0, 1, 1, 0) + t(0, 0, 0, 1)$$

donc $A = \{v_1(1, -2, 0, 0), v_2(0, 1, 1, 0), v_3(0, 0, 0, 1)\}$
est une partie génératrice de E_2 .

b) Est-ce-que A libre ?

$$\text{Soient } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R} \text{ tels que } \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0_{\mathbb{R}^4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ -2\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \\ \alpha_4 = 0 \end{cases}$$

donc A est libre. D'où $A = \{v_1, v_2, v_3\}$

est une base de E_2 .