Université de Relizane

Faculté des Sciences et Technologie

Département de Génie Mécanique

-2021/2022-

Comportement Mécanique des Matériaux Composites et Multi-Matériaux

-S2- MI GM

Corrigé TD N°2

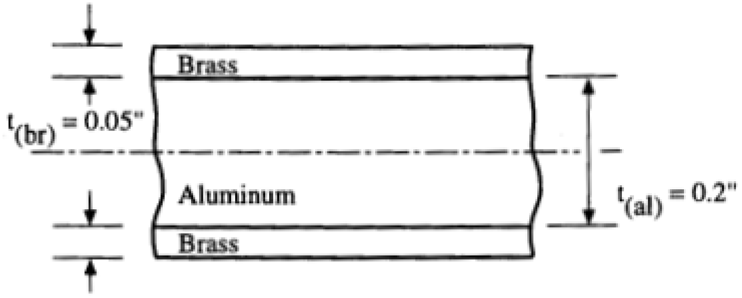
Solution 1 :

Le stratifié sandwich illustré à la figure ci-dessous est composé d'un noyau en aluminium d'épaisseur $e_{Al} = 5.08$mm et de feuilles de face en laiton de $e_{Laiton} = 1.27$mm chacune. Déterminer les propriétés élastiques effectives, E_{eff}, G_{eff} et ν_{eff} de ce stratifié. L'aluminium et le laiton ont les propriétés suivantes : $E_{Al} = 69MPa$, $G_{Al} = 25.5MPa$, $E_{Laiton} = 103MPa$, $G_{Laiton} = 38.62MPa$

Compte tenu des modules d'élasticité et de cisaillement, le coefficient de Poisson pour les deux matériaux peut être calculée comme suit :

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \Longrightarrow \nu = \frac{E}{2G} - 1;\ donc\ \nu_{al} = 0.351\ et\ \nu_{Laiton} = 0.339$$

Les matrices de rigidité réduites pour les deux matériaux sont :



Stratifié sandwich symétrique en aluminium et laiton

$$\sigma = Q\varepsilon$$

D'où

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{11} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}$$

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E}{1-\nu^2},$$

$$Q_{12} = \frac{E\nu}{1-\nu^2} \quad et$$

$$Q_{66} = G$$

Où la matrice Q est appelée matrice de rigidité matérielle réduite.

Pour l'Aluminium :

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E}{1-\nu^2} = \frac{69}{1-(0.351)^2} = \frac{69}{0.877} = 78.68MPa$$

$$Q_{12} = \frac{E\nu}{1-\nu^2} = 78.68 * 0.351 = 27.62MPa \quad et$$

$$Q_{66} = 25.5MPa$$

$$Q_{Al} = \begin{bmatrix} 78.62 & 27.68 & 0 \\ 27.68 & 78.62 & 0 \\ 0 & 0 & 25.5 \end{bmatrix} MPa$$

Et pour le Laiton:

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E}{1-\nu^2} = \frac{103}{1-(0.339)^2} = \frac{103}{0.885} = 116.38MPa$$

$$Q_{12} = \frac{E\nu}{1-\nu^2} = 116.38 * 0.339 = 39.45MPa \quad et$$

$$Q_{66} = 38.62MPa$$

$$Q_{Laiton} = \begin{bmatrix} 116.38 & 39.45 & 0 \\ 39.45 & 116.38 & 0 \\ 0 & 0 & 38.62 \end{bmatrix} MPa$$

Les contraintes étant constantes au sein d'une couche, l'intégration peut être remplacée par une sommation sur les couches individuelles :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{N} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_{(k)} dz = \sum_{k=1}^{N} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_{(k)} (z_k - z_{k-1})$$

Où N est le nombre de couches, l'indice (k) désigne les quantités dans la kème couche et les z_k sont les emplacements à travers l'épaisseur des interfaces entre les couches. En substituant la loi contrainte-déformation, l'équation nous donne :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{N} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_{(k)} dz = \left(\sum_{k=1}^{N} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{11} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}_{(k)} (z_k - z_{k-1}) \right) \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix}$$

L'équation peut être réécrite comme suit :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix}$$

Les coefficients de la matrice A sont donnés par :

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^{N} Q_{ij_{(k)}} (z_k - z_{k-1})$$

Ou

$$A_{11} = A_{22} = \sum_{k=1}^{N} \frac{E_{(k)}}{1 - \nu_{(k)}^2} e_k, \quad A_{12} = \sum_{k=1}^{N} \frac{\nu_{(k)} E_{(k)}}{1 - \nu_{(k)}^2} e_k, \quad A_{66} = \sum_{k=1}^{N} G_{(k)} e_k$$

Où $e_k = z_k - z_{k-1}$

Et par conséquent :

$$A_{11} = A_{22} = \sum_{k=1}^{N} \frac{E_{(k)}}{1 - \nu_{(k)}^2} e_k = \frac{E_{(Al)}}{1 - \nu_{(Al)}^2} e_{Al} + 2 \frac{E_{(Laiton)}}{1 - \nu_{(Laiton)}^2} e_{Laiton}$$

$$A_{12} = \sum_{k=1}^{N} \frac{\nu_{(k)}E_{(k)}}{1-\nu_{(k)}^2} e_k = \frac{\nu_{(Al)}E_{(Al)}}{1-\nu_{(Al)}^2} e_{Al} + 2\frac{\nu_{(Laiton)}E_{(Laiton)}}{1-\nu_{(Laiton)}^2} e_{Laiton}$$

$$A_{66} = \sum_{k=1}^{N} G_{(k)}e_k = G_{(Al)}e_{Al} + 2G_{(Laiton)}e_{Laiton}$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} = 5.08\begin{bmatrix} 78.62 & 27.68 & 0 \\ 27.68 & 78.62 & 0 \\ 0 & 0 & 25.5 \end{bmatrix} + 2.54\begin{bmatrix} 116.38 & 39.45 & 0 \\ 39.45 & 116.38 & 0 \\ 0 & 0 & 38.62 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 399.39 & 140.61 & 0 \\ 140.61 & 399.39 & 0 \\ 0 & 0 & 129.54 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 295.61 & 100.20 & 0 \\ 100.20 & 295.61 & 0 \\ 0 & 0 & 98.09 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 695 & 240.81 & 0 \\ 240.81 & 695 & 0 \\ 0 & 0 & 227.63 \end{bmatrix} N/mm$$

En utilisant l'équation, nous calculons les propriétés élastiques effectives

$$E_{eff} = \frac{1}{h}\left(\frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{22}}\right) = \frac{1}{5.08 + 2 * 1.27}\left(\frac{(695)^2 - (240.81)^2}{695}\right)$$

$$E_{eff} = \frac{649.91}{7.62} = \frac{483025 - 57989.46}{7.62} = 80.26MPa$$

$$\nu_{eff} = \frac{A_{12}}{A_{22}} = \frac{240.81}{695} = 0.35$$

Le module de cisaillement effectif s'obtient simplement comme :

$$G_{eff} = \frac{A_{66}}{h} = \frac{227.63}{7.62} = 29.87MPa$$

Notons que ces propriétés sont la moyenne pondérée des modules d'élasticité E et G des deux matériaux, et très proches de la moyenne pondérée des coefficients de Poisson ν des deux matériaux.

Exercice 2 :

Un stratifié bicouche est composé d'une feuille d'aluminium d'épaisseur $e_{Al} = 5.08mm$ en haut et d'une feuille de laiton de $e_{Laiton} = 1.27mm$ en bas. Les propriétés élastiques de l'aluminium et du laiton sont les mêmes que celles données dans **l'exercice 1**. Sous l'action des moments fléchissants sans charges dans le plan, le stratifié plie tel que $\kappa_x = 23.6 \times 10^{-4}\ 1/mm$, $\kappa_y = 23.6 \times 10^{-5}\ 1/mm$ et $\kappa_{xy} = 0.0\ 1/mm$.

Déterminez la déformation dans le plan subie par le stratifié.

Déterminer l'amplitude du moment de flexion nécessaire pour provoquer cette flexion.

Solution 2

L'utilisation de la matrice de rigidité réduite pour la configuration du stratifié est calculée comme étant

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} = 5.08Q_{Al} + 1.27Q_{Laiton}$$

Où la matrice Q est appelée matrice de rigidité matérielle réduite

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{11} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}$$

$$Q_{11} = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad Q_{12} = \frac{\nu E}{1-\nu^2} \quad et \quad Q_{66} = G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

D’où

$$Q_{Al} = \begin{bmatrix} 78.62 & 27.68 & 0 \\ 27.68 & 78.62 & 0 \\ 0 & 0 & 25.5 \end{bmatrix} MPa$$

et

$$Q_{Laiton} = \begin{bmatrix} 116.38 & 39.45 & 0 \\ 39.45 & 116.38 & 0 \\ 0 & 0 & 38.62 \end{bmatrix} MPa$$

La matrice de rigidité dans le plan peut être calculée comme suit :

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} = 5.08 \begin{bmatrix} 78.62 & 27.68 & 0 \\ 27.68 & 78.62 & 0 \\ 0 & 0 & 25.5 \end{bmatrix} + 1.27 \begin{bmatrix} 116.38 & 39.45 & 0 \\ 39.45 & 116.38 & 0 \\ 0 & 0 & 38.62 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 399.39 & 140.61 & 0 \\ 140.61 & 399.39 & 0 \\ 0 & 0 & 129.54 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 147.80 & 50.10 & 0 \\ 50.10 & 147.80 & 0 \\ 0 & 0 & 49.05 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 547.19 & 190.71 & 0 \\ 190.71 & 547.19 & 0 \\ 0 & 0 & 178.59 \end{bmatrix} N/mm$$

Les distances aux limites de couche sont $z_0 = -3.175mm$, $z_1 = 1.905mm$ et $z_2 = 3.175mm$, et la matrice de rigidité en flexion-extension pour le stratifié est

$$B_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} Q_{ij_{(k)}}\left(z_k^2 - z_{k-1}^2\right)$$

$$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left[Q_{Al}(1.905^2 - (-3.175)^2) + Q_{Laiton}(3.175^2 - 1.905^2)\right]$$

$$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix} = 3.246\left[-\begin{bmatrix} 78.62 & 27.68 & 0 \\ 27.68 & 78.62 & 0 \\ 0 & 0 & 25.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 116.38 & 39.45 & 0 \\ 39.45 & 116.38 & 0 \\ 0 & 0 & 38.62 \end{bmatrix}\right]$$

$$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix} = 3.246\begin{bmatrix} 37.76 & 11.77 & 0 \\ 11.77 & 37.76 & 0 \\ 0 & 0 & 13.12 \end{bmatrix} kg$$

et la matrice de rigidité en flexion est :

$$D_{ij} = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{N} Q_{ij_{(k)}}\left(z_k^3 - z_{k-1}^3\right)$$

$$\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\left[Q_{Al}(1.905^3 - (-3.175)^3)\right] + Q_{Laiton}(3.175^3 - 1.905^3)$$

$$\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} = 2.164\begin{bmatrix} 37.76 & 11.77 & 0 \\ 11.77 & 37.76 & 0 \\ 0 & 0 & 13.12 \end{bmatrix} kg.mm$$

Compte tenu des courbures du stratifié, nous pouvons utiliser l'équation $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{B\kappa} + \boldsymbol{A\varepsilon^0}$ pour résoudre les valeurs des déformations du plan médian du stratifié dans le plan. Puisque les résultantes de contraintes dans le plan sont nulles.

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{11} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Et on peut résoudre cette équation pour obtenir

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -540.52 \\ 74.18 \\ 0.0 \end{Bmatrix} \times 10^{-6}$$

Une fois que les courbures et les déformations dans le plan sont connues, les moments qui les génèrent peuvent être calculés à partir de l'équation :

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{B\varepsilon^0} + \boldsymbol{D\kappa}$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{11} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{11} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 454.4 \\ 116.1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$