Chapitre 1

Intégrales simples et multiples

1.1 Rappels sur l'intégrale de Riemann et sur le calcul de primitives

Soit f une fonction définie sur $[a, b]$, tel que pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \geq 0$.

1.1.1 Intégrale de Riemann

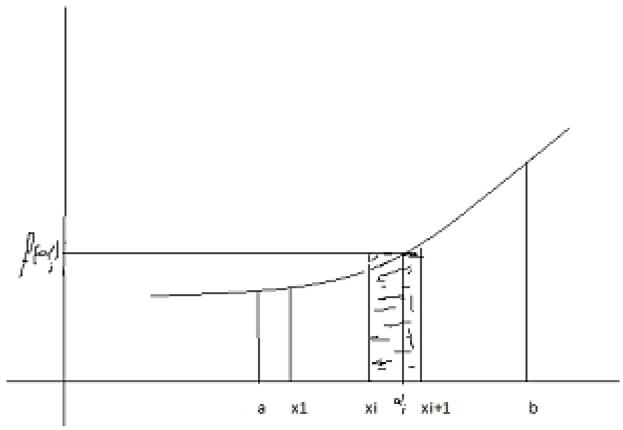
On appelle subdivision $\triangle$ de l'intervalle $[a, b]$ un ensemble fini de $n+1$ réels $\{x_p \in [a, b] / 0 \leq p \leq n\}$, avec $x_0 = a, x_n = b, \forall p, x_p \leq x_{p+1}$.

$\delta(\triangle) = \max\limits_{0 \leq p \leq n-1} (x_{p+1} - x_p)$ s'appelle le "pas" de $\triangle$.

Définition 1.1.1 *On considère une subdivision $\triangle$ sur $[a, b]$ et on choisit $\alpha_i \in [x_i, x_{i+1}[$,on appelle somme de riemann relative a la subdivision $\triangle$ au choix des $\alpha = (\alpha_i)_{0 \leq i \leq n-1}$ la somme:*

$$\mathfrak{R}(f, \triangle, \alpha) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\alpha_i)(x_{i+1} - x_i)$$

Géométriquement



Définition 1.1.2 *On dit la fonction* f *est intégrable au sens de Riemann si* $\lim\limits_{\delta(\triangle)\to 0} \Re(f, \triangle, \alpha) = I$ *est finie* $\forall\alpha$,

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f$$

Exemple 1.1.3 $\left\{x_i = \frac{i}{n}, i = 0, ..., n\right\}$ *est une subdivision de l'intervalle* $[0,1]$

$f(x) = x$ *sur l'intervalle* $[0,1]$, *on a*

$$(x_{i+1} - x_i) = \frac{1}{n}, \forall i = 0, ..., n$$

la somme

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{n}\left(\frac{i+1}{n} - \frac{i}{n}\right) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{n^2} = \frac{n(n-1)}{2n^2},$$

est une somme de Riemann da la fonction $f(x) = x$ *sur l'intervalle* $[0,1]$.

1.1.2 Sommes de Darboux

Définition 1.1.4 *On considère une subdivision* $\triangle$ *sur* $[a,b]$ *et on choisit* $I_i + [x_i, x_{i+1}[$ *,on choisit*

$$\begin{aligned} m_i &= \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}[} |f(x)| \\ M_i &= \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}[} |f(x)| \end{aligned}$$

Les deux sommes suivantes

$$\begin{aligned} S(f, \triangle) &= \sum_{i=0}^{n-1} M_i (x_{p+1} - x_p) \\ s(f, \triangle) &= \sum_{i=0}^{n-1} m_i (x_{p+1} - x_p) \end{aligned}$$

appelées respectivement sommes de Darboux inférieure et supérieure.

Théorème 1.1.5 *Si* $\lim\limits_{\delta(\triangle) \to +\infty} S(f, \triangle) = \lim\limits_{\delta(\triangle) \to +\infty} s(f, \triangle)$ *alors* f *est intégrable en sens de Riemann.*

Proposition 1.1.6 *Toute fonction continue sur un intervalle I est une fonction intégrable en sens de Riemann sur I.*

Exemple 1.1.7 $\left\{x_i = \frac{i}{n}, i = 0, ..., n\right\}$ *est une subdivision de l'intervalle* $[0,1]$

$f(x) = x$ *sur l'intervalle* $[0,1]$, *on a*

$$(x_{i+1} - x_i) = \frac{1}{n}, \forall i = 0, ..., n$$

$$\begin{aligned} m_i &= \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}[} |f(x)| = \frac{i}{n} \\ M_i &= \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}[} |f(x)| = \frac{i+1}{n} \end{aligned}$$

on calcule les deux sommes de Darboux

$$\begin{aligned} S(f,\triangle) &= \sum_{i=0}^{n-1} M_i\left(x_{p+1}-x_p\right) = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{i+1}{n^2} = \frac{n(n+1)}{2n^2} \\ s(f,\triangle) &= \sum_{i=0}^{n-1} m_i\left(x_{p+1}-x_p\right) = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{i}{n^2} = \frac{n(n-1)}{2n^2} \end{aligned}$$

On remarque que $\lim\limits_{n\to+\infty} S(f,\triangle) = \lim\limits_{n\to+\infty} s(f,\triangle) = \frac{1}{2}$

donc f *est intégrable en sens de Riemann.*

1.1.3 Propriétés de l'intégrale de Riemann

Soient f et g deux fonctions, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $a, b, c \in \mathbb{R}\,(a \leq c \leq b)$ on a:

1) Si la fonction f intégrable sur les intervalles $[a, c]$ et $[c, b]$ elle est intégrable sur l'intervalle $[a, b]$ et on a

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x) + \int_c^b f(x)\,dx$$

2) Si la fonction f est intégrable sur l'intervalle $[a, b]$ et $f \geq 0$ alors

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$$

3) Si les fonctions f est intégrable sur l'intervalle $[a, b]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors la fonction λf est intégrable sur l'intervalle $[a, b]$

$$\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda\int_a^b f(x)\,dx$$

4) Si les fonctions f et g sont intégrables sur l'intervalle $[a, b]$

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x) + \int_a^b g(x)\,dx$$

Soit$f$ une fonction intégrable sur $[a, b]$

Valeur moyenne