

On appelle moyen de f dans $[a, b]$ le nombre $m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.

Exemple 1.1.8 On calcule le moyen des carrés des réels compris entre 0 et 1.

$$\int_0^1 x^2 dx = \int_0^1 m dx \implies m = \frac{1}{3}$$

Valeur efficace

On appelle valeur efficace de f dans $[a, b]$ le nombre v tel que $v^2 = \frac{1}{b-a} \int_a^b (f(x))^2 dx$.

Exemple 1.1.9 On calcule la valeur efficace de la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ dans $[0, 1]$

$$\int_0^1 x dx = \int_0^1 v^2 dx \implies v = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

1.2 Calcul de primitives (Intégrale indéfinie)

Définition 1.2.1 Soit f une fonction continue sur I .

On dit que $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une primitive de f sur I ssi la dérivée de F donne f ($F' = f$). On prend alors l'habitude de noter toute primitive de f sous forme

$$F(x) = \int f(x) dx$$

et s'appelle aussi intégrale indéfinie de f .

Remarque 1.2.2 La primitive d'une fonction s'il existe n'a pas unique.

Exemple 1.2.3 1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x$. Alors $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$F(x) = \frac{x^2}{2}$ est une primitive de f ,

aussi la fonction définie par $F(x) = \frac{x^2}{2} + 2$ est une primitive de f .

1.2.1 Primitives des fonctions usuelles

La fonction f	La primitive de f définie par: ($k \in \mathbb{R}$)	l'intervalle I
$f(x) = c$	$F(x) = cx + k$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$F(x) = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + k$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$ si $\alpha \leq -1$ $\mathbb{R}$ si $\alpha \geq -1$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln x + k$	$] -\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + k$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x + k$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x + k$	$\mathbb{R}$

Proposition 1.2.4 Soient f et g deux fonctions continues et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a:

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx, \int \lambda f(x) dx = \lambda \int f(x) dx.$$

1.2.2 Intégration par parties – Changement de variable

Intégration par parties

Théorème 1.2.5 Soient u et v deux fonctions dérivables. On a

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

Preuve. On a $(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

$$\text{alors } \int (u(x)v(x))' dx = \int u'(x)v(x)dx + \int u(x)v'(x)dx$$

donc

$$u(x)v(x) = \int u'(x)v(x)dx + \int u(x)v'(x)dx$$

c'est à dire

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

□

Exemple 1.2.6 calculons $\int x^2 e^x dx$

On a

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2x e^x dx = \int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx$$

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x dx$$

$$\text{alors } \int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx = x^2 e^x - 2 x e^x + 2 e^x + c, c \in \mathbb{R}$$

Changement de variable

Théorème 1.2.7 Soient u une fonction dérivable et f une fonction continue avec

$$F(x) = \int f(x) dx$$

$$\text{On a } \int u' f(u) dx = \int f(u) du = F(u)$$

Exemple 1.2.8 Calculons la primitive

$$K(x) = \int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx.$$

on choisit $u(x) = \cos x, f(x) = \frac{1}{x}, u'(x) = -\sin x, F(x) = \ln |x| + c, c \in \mathbb{R}.$

$$\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int u' f(u) dx = \int f(u) du = F(u) = -\ln |\cos x| + c, c \in \mathbb{R}.$$

$$K(x) = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\ln |\cos x| + c, c \in \mathbb{R}.$$