

Séries Numériques

Le but de cette partie est de faire comprendre ce qu'est une série numérique et ce que veut dire qu'elle converge. Il ne s'agit pas de montrer toutes les subtilités possibles (par exemple les cas où on ne peut pas : utiliser les équivalents, décomposer une somme en deux sommes, faire des sommes par blocs, ...)

1.1 Définitions

Définition 1.1 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. On appelle série de terme général la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k.$$

- On dit que la série de terme général (u_n) converge si et seulement si la suite (S_n) converge. Dans ce cas on appelle somme de la série sa limite que l'on note

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{k=0}^{\infty} u_k.$$

On fera l'abus de langage de dire que $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ converge.

- On dit que la série de terme générale (u_n) diverge si la suite (S_n) diverge. On fera l'abus de langage de dire que $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ diverge.

Exemples :

- Soit $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$. En notant que $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, on montre que la série de terme générale (u_n) converge.

- Soit $v_n = k^n$. En utilisant les résultats sur les suites géométriques (ou en les retrouvant), on montre que la série de terme générale (v_n) converge si et seulement si $|k| < 1$. On étudiera les cas particuliers de $k \in \{-1, 1\}$

- Soit $w_n = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$. En notant que $w_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, on montre que la série de terme général (w_n) diverge.

Définition 1.2 On dit que la série de terme générale (u_n) est absolument convergente si et seulement si $\sum_{k=0}^{\infty} |u_k|$ converge. Dans ce cas la série est convergente.

1.2 Propriétés

Signalons tout d'abord le résultat naturel concernant la somme de deux séries.

Proposition 1.3 Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les termes généraux de deux séries numériques convergentes. La série numérique de terme général $(u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est alors aussi convergente et vérifie :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n + v_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \sum_{n=0}^{\infty} v_n.$$

Remarque : Il est important de comprendre la propriété précédente. Entre autre cela veut dire que si l'on sait que la série numérique de terme général $(u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente on ne peut pas séparer sa somme en deux sans avoir au préalable vérifier la nature des nouvelles séries.

La condition qui suit est nécessaire, attention celle-ci n'est pas suffisante.

Proposition 1.4 Si $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ converge, alors la suite (u_n) converge vers 0. Si la suite (u_n) ne converge pas vers 0, on dit alors que la série est grossièrement divergente.

La preuve est immédiate si on note que $S_{n+1} - S_n = u_{n+1}$. (On reviendra sur les exemples précédents pour un contre-exemple).

1.3 Critère de comparaison pour les séries de termes généraux à signe constant

Remarque :

Si la suite (u_n) est à termes positifs ou nuls, alors la suite (S_n) est croissante, dans ce cas soit elle est majorée et converge, soit elle diverge vers $+\infty$.

Si la suite (u_n) est à termes négatifs ou nuls, alors la suite (S_n) est décroissante, dans ce cas soit elle est minorée et converge, soit elle diverge vers $-\infty$.

Soit (u_n) et (v_n) des suites à termes positifs ou nuls.

- On suppose que $u_n \leq v_n$.

Si $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ diverge alors $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$ diverge.

Si $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$ converge alors $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ converge.

- On suppose que $u_n \sim v_n$ alors $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ et $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$ sont de même natures.

Exemples : A l'aide des exemples vu précédemment on peut donc dire que la série de terme générale $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ diverge alors que la série de terme général $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

Proposition 1.5 (*Critère de "d'Alembert"*)

Soit (u_n) une suite ne s'annulant pas.

- Si il existe une constante $k < 1$ telle que pour tout n $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leq k$, alors la série de terme général (u_n) est absolument convergente.
- Si pour tout n , $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \geq 1$ alors la série est grossièrement divergente.

Remarque : Quand on a vérifié uniquement que $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < 1$ alors on ne peut pas conclure.

1.4 Séries de références

Pour conclure cette partie nous allons nous donner des résultats de convergence pour des séries particulières nous permettant d'appliquer les critères de comparaison.

Rappelons que nous avons montré que les séries de termes généraux $(k^n)_n$ ne convergent que si $|k| < 1$.

Une autre famille importante appelée les séries de Riemann est gérée par la propriété suivante.

Proposition 1.6 Les séries de terme général $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont convergentes si et seulement si $\alpha > 1$.

Pour une preuve on peut traiter le cas $\alpha \neq 1$ en utilisant l'équivalent

$$(n+1)^a - n^a \sim an^{a-1}.$$

On traite le dernier cas par l'absurde en montrant que le reste de la somme, minorée par $\frac{1}{2}$ (ou $\frac{5}{6}$ pour changer), ne peut pas converger vers 0.

Enfin signalons que la série de terme général $\left(\frac{1}{n!}\right)$ converge (on peut le montrer en utilisant le critère de d'Alembert).

Pour la culture, on pourra étudier le comportement des séries de termes généraux respectifs, $\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $\left(\frac{(-1)^n \sqrt{n+1}}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ pour expliquer l'importance de travailler avec des séries de termes généraux de signe constant pour utiliser les critères de comparaison.