

$((n+1)a_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ a même rayon (il suffit de revenir à la définition), on l'appelle série dérivée de f et on vérifie pour tout $x \in]-R, R[$:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

Enfin on vérifie que $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

Exemple :

On étudie la série entière de terme général $\left(\frac{1}{n!}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ et on montre que l'on retrouve la fonction exponentielle avec toutes ses propriétés.

3 Séries de Fourier

Le but de cette partie est de faire comprendre que l'on peut approcher les fonctions périodiques à l'aide des fonctions trigonométriques. L'aspect espace de hilbert, base orthonormée ne sera pas du tout abordé.

3.1 Fonctions périodiques

Définition 3.1 On dit qu'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est périodique si il existe un réel $T > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x+T) = f(x).$$

On dit que T est une période.

Définition 3.2 Si il existe $T_0 = \min\{T > 0, f(x+T) = f(x) \forall x \in \mathbb{R}\}$, on appelle T_0 la période de f . On dit qu'une fonction f est T -périodique si T est une période de f .

Exemples :

- 1) La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(2x)$ est périodique. On voit facilement que 2π est **une** période et que π est **sa** période.
- 2) La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x - E(x)$ où ($E(x)$ est la partie entière de x) est périodique, on montre facilement que 1 est sa plus petite période.
- 3) Signalons que l'on peut définir une fonction périodique de la manière suivante, h est la fonction définie sur $\mathbb{R}$, paire 4π périodique telle que pour tout $x \in [0, 2\pi]$, $f(x) = 2\pi - x$. (Pour dessiner la fonction, on fait sa représentation sur $[0, 2\pi]$ puis par parité sur $[-2\pi, 0]$ et enfin par périodicité sur $\mathbb{R}$).
- 4) Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que $\varphi(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $\varphi(x) = 2$ si $x \notin \mathbb{Q}$. On montre que cette fonction est périodique, tout rationnel est une période, cette fonction n'admet donc pas de plus petite période.

On signalera les propriétés géométriques des représentations des fonctions T -périodiques.

Remarques : La somme (ou le produit) de deux fonctions périodiques n'est pas forcément périodique, il faut pour cela qu'elles admettent une période commune.

Définition 3.3 Soit f une fonction T -périodique. On dit que f est continue par morceaux si sur le segment $[0, T]$ il existe un nombre fini de points $(x_k)_{1 \leq k \leq n}$ tels que f soit continu sur $[0, T] \setminus \{x_k, 1 \leq k \leq n\}$ et admet des limites à gauche et à droite des points x_k .

On dit que f est C^1 par morceaux si sur le segment $[0, T]$ il existe un nombre fini de points $(x_k)_{1 \leq k \leq n}$ tels que f soit continu et dérivable sur $[0, T] \setminus \{x_k, 1 \leq k \leq n\}$ et que f et sa dérivée f' admettent des limites à gauche et à droite des points x_k .

Proposition 3.4 Soit f une fonction T -périodique, continue par morceaux, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\int_0^T f(t)dt = \int_x^{x+T} f(t)dt.$$

3.2 Coefficients de Fourier

Dans cette partie f désigne une fonction T -périodique au moins continue par morceaux.

Définition 3.5 On appelle coefficients de Fourier de f les réels suivants

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t)dt, \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right) dt, \forall n \geq 1, \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin\left(\frac{2n\pi}{T}t\right) dt, \forall n \geq 1. \end{aligned}$$

On appelle série de Fourier associée à f la série suivante

$$S(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi}{T}x\right).$$

Proposition 3.6 Si la fonction f est impaire alors les coefficients a_n sont nuls. Si la fonction f est paire alors les coefficients b_n sont nuls.

Les résultats suivants nous permettent de faire le lien sous certaines hypothèses entre une fonction f et sa série de Fourier associée S .

Théorème 3.7 (Théorème de Dirichlet)

Si f est C^1 par morceaux, alors sa série de Fourier $S(x)$ converge. De plus si f est continue au point x alors $S(x) = f(x)$. Si x est un point de discontinuité, si on note $f(x^+)$ la limite à droite et $f(x^-)$ la limite à gauche, alors :

$$S(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}.$$

Enfin on vérifie le résultat suivant où on suppose uniquement que f est continue par morceaux

Théorème 3.8 (Egalité de Parseval)

On vérifie l'égalité suivante :

$$\frac{2}{T} \int_0^T f^2(t) dt = 2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2.$$

Exemple :

On pourra étudier la fonction 1-périodique définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = x - E(x).$$

On dessinera la courbe représentative de g .

On pourra appliquer les résultats du théorème de Dirichlet en 0 , $\frac{1}{2}$ et en $\frac{1}{4}$ ainsi que la formule de Parseval.