Chapitre5 Transformation de Fourier

5.1Introductionetnotations

La notion de série de Fourier permet d'analyser les fonctions définies d'un compact $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). La notion de transformée de Fourier permet d'analyser les fonctions définies de $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{R}^N$) dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). La transformée de Fourier est une notion employée par exemple en théorie du signal, en théorie des probabilités et pour l'analyse des équations aux dérivées partielles.

Dans toute la suite, on considèrera l'espace mesuré $(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$ et on notera $d\lambda_N(x) = dx$. Soit $N \geq 1$, les espaces $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$ et $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$ ont été définis dans la section 4.10 et les espaces $\mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$ et $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$ ont été définis dans la section 6.2. On rappelle aussi que si f est une fonction définie de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{C}$, la fonction f est mesurable si et seulement si ses parties réelle et imaginaire sont mesurables (chaque ensemble, $\mathbb{R}^N$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, étant muni de sa tribu borélienne). On peut, bien sûr, aussi définir les espaces $\mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$ et $L^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$ pour tout $p \in [1, \infty]$.

Définition5.1(Espaces $L^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$) *Soit $N \geq 1$, $p \in [1, \infty]$ et f une fonction mesurable de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{C}$ (c'est-à-dire $f^{-1}(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$). On dit que $f \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$ si $|f| \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$ et on définit $\|f\|_p$ par $\|f\|_p = |||f|||_p$ où $|||f|||_p$ est la norme de $|f|$ dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$ (vue au chapitre 6). L'espace $L^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$ est l'espace $\mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$ quotienté par le relation d'équivalence "= p.p.". C'est un espace de Banach (complexe), c'est-à-dire un e.v.n. (sur $\mathbb{C}$) complet.*

Remarque5.1 Soit $N \geq 1$, $p \in [1, \infty]$ et f une fonction définie de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{C}$. Il est facile de voir que $f \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$ si et seulement si ses parties réelle et imaginaire sont dans $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$.

5.2TransformationdeFourierdans L^1

5.2.1Définitionsetpremièrespropriétés

Soit $N \geq 1$. Pour $x = (x_1, \ldots, x_N)^t \in \mathbb{R}^N$ et $t = (t_1, \ldots, t_N)^t \in \mathbb{R}^N$, on note $x \cdot t$ le produit scalaire euclidien de x et t, c'est-à-dire $x \cdot t = \sum_{i=1}^N x_i t_i$. Dans ce chapitre, On note aussi $L^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ l'espace $L^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$, pour $p \in [1, \infty]$.

Définition5.2(TransforméedeFourierdans L^1)

Soit $N \geq 1$ et $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$. Pour $t \in \mathbb{R}^N$, l'application $x \mapsto e^{-ix\cdot t}f(x)$ (définie de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{C}$) appartient à $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$. On définit alors $\hat{f}(t)$ par :

$$\hat{f}(t) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int f(x)e^{-ix\cdot t}dx. \tag{10.1}$$

La fonction $\hat{f}$ (définie de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{C}$) s'appelle transformée de Fourier de f.

On note $C_0(\mathbb{R}^N,\mathbb{C}) = \{g \in C(\mathbb{R}^N,\mathbb{C})$ t.q. $g(t) \to 0$ quand $|t| \to +\infty\}$. On rappelle que $C_0(\mathbb{R}^N,\mathbb{C})$ est un espace de Banach quand il est muni de la norme de la convergence uniforme, c'est-à-dire :

$$\|\varphi\|_u = \max_{x\in\mathbb{R}^N} |\varphi(x)|.$$

Proposition5.1 *Soit $N \geq 1$. Soit F l'application qui à f (appartenant à $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$) associe sa transformée de Fourier. F est une application linéaire continue de $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ dans $C_0(\mathbb{R}^N,\mathbb{C})$.*

DÉMONSTRATION :
- Le théorème de continuité sous le signe $\int$ (théorème 4.9) appliqué à la fonction $(x,t) \mapsto e^{-ix.t}f(x)$ entraîne immédiatement que $\hat{f}$ est continue.
- On montre maintenant que $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
  - Cas $N = 1$. On remarque que pour $t \neq 0$, on a, comme $e^{i\pi} = -1$,

    $$\hat{f}(t) = -(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int e^{-i(x-\frac{\pi}{t})t}f(x)dx,$$

    et donc avec un changement de variable simple,

    $$\hat{f}(t) = -(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int e^{-iyt}f(y+\frac{\pi}{t})dy.$$

    On en déduit que

    $$2\hat{f}(t) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int e^{-ixt}(f(x)-f(x+\frac{\pi}{t}))dx$$

    et donc que $|\hat{f}(t)| \leq \frac{1}{2}(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\|f(\cdot)-f(\cdot+\frac{\pi}{t})\|_1$. Le théorème de continuité en moyenne dans L^1 (théorème 5.6) donne alors le fait que $\hat{f}(t) \to 0$ quand $|t| \to \infty$.
  - Cas $N > 1$. On reprend la même méthode. Pour $t \neq 0$, $t = (t_1,\ldots,t_N)^t$, il existe $j \in \{1,\ldots,N\}$ t.q. $|t_j| = \max_{k=1,\ldots,N}|t_k|$. On a alors, comme $e^{i\pi} = -1$, en notant e_j le j-ième vecteur de base de $\mathbb{R}^N$,

    $$\hat{f}(t) = -(2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int e^{-i(x-\frac{\pi}{t_j}e_j)\cdot t}f(x)dx,$$

    et donc avec un changement de variable simple,

    $$\hat{f}(t) = -(2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int e^{-iy\cdot t}f(y+\frac{\pi}{t_j}e_j)dy.$$

    On en déduit que $|\hat{f}(t)| \leq \frac{1}{2}(2\pi)^{-\frac{N}{2}}\|f(\cdot)-f(\cdot+\frac{\pi}{t_j}e_j)\|_1$. Le théorème de continuité en moyenne dans L^1 (théorème 8.2) donne alors le fait que $\hat{f}(t) \to 0$ quand $|t| \to \infty$.

La tansformée a la propriété intéressante de transformer la convolution en produit. Ceci est montré dans la proposition suivante.

Proposition5.2 *Soient f et $g \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$, alors* $\widehat{f \star g} = (2\pi)^{\frac{N}{2}} \hat{f}\hat{g}$.

DÉMONSTRATION : Par la proposition 7.9, on $f \star g \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ et pour p.p. $x \in \mathbb{R}^N$, $f \star g(x) = \int f(x-y)g(y)dy$. On a donc, pour tout $t \in \mathbb{R}^N$,

$$\widehat{f \star g}(t) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int \left(\int f(x-y)g(y)dy \right) e^{-ix\cdot t}dx =$$
$$(2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int \left(\int f(x-y)g(y)e^{-i(x-y)\cdot t}e^{-iy\cdot t}dy \right) dx.$$

En appliquant le théorème de Fubini (théorème 7.3) à la fonction $(x, y) \mapsto f(x-y)g(y)e^{-i(x-y)\cdot t}e^{-iy\cdot t}$ (qui est bien intégrable sur $\mathbb{R}^{2N}$ car son module est la fonction $(x, y) \mapsto |f(x-y)g(y)|$ dont l'intégrale sur $\mathbb{R}^{2N}$ est égale à $\|f\|_1\|g\|_1$), on obtient :

$$\widehat{f \star g}(t) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int \left(\int f(x-y)e^{-i(x-y)\cdot t}dx \right) g(y)e^{-iy\cdot t}dy.$$

Comme, pour tout $y \in \mathbb{R}^N$, $\int f(x-y)e^{-i(x-y)\cdot t}dx = \int f(z)e^{-iz\cdot t}dz = (2\pi)^{\frac{N}{2}}\hat{f}(t)$, on en déduit :

$$\widehat{f \star g}(t) = \hat{f}(t) \int g(y)e^{-iy\cdot t}dy = (2\pi)^{\frac{N}{2}}\hat{f}(t)\hat{g}(t),$$

ce qui est le résultat annoncé. ■