

En posant $p(t) = a_N(it)^N + \dots + a_1it + a_0$ et en supposant que p ne s'annule pas sur \mathbb{R} , on a alors :

$$\hat{f}(t) = \frac{\hat{g}(t)}{p(t)}. \quad (10.8)$$

Comme $g \in \mathcal{S}_1$ et que p ne s'annule pas sur \mathbb{R} , on peut montrer que $\frac{\hat{g}}{p} \in \mathcal{S}_1$. En utilisant maintenant le théorème d'inversion, ou la proposition 10.6, on obtient :

$$f(t) = \hat{f}(-t) = \widehat{\left(\frac{\hat{g}}{p}\right)}(-t), \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}. \quad (10.9)$$

On a donc montré que f est nécessairement donnée par (10.9). Réciproquement, il est facile de voir que la fonction donnée par (10.9) est solution de (10.5), c'est donc l'unique solution dans \mathcal{S}_1 de (10.5) (en supposant que p ne s'annule pas sur \mathbb{R}).

Soit $N \geq 1$, on cherche $u : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^2 (c'est-à-dire deux fois continûment dérivable) t.q.

$$-\Delta u(x) = 0, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^N. \quad (10.10)$$

Cherchons $u \in \mathcal{S}_N$ (et donc $\Delta u \in \mathcal{S}_N$) solution de (10.10). On a donc $\widehat{\Delta u} = 0$ (partout sur \mathbb{R}^N), c'est-à-dire $|t|^2 \hat{u}(t) = 0$ et donc $\hat{u}(t) = 0$, pour tout $t \neq 0$. Comme \hat{u} est continue, ceci entraîne que $\hat{u} = 0$ (partout sur \mathbb{R}^N), et donc $u = 0$. La fonction identiquement égale à 0 est donc la seule solution de (10.10) dans \mathcal{S}_N .

On peut effectuer un raisonnement analogue si on cherche u de classe C^2 et dans $L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N)$ (on peut aussi le faire si u est seulement dans $L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N)$, il faut alors convenablement définir Δu). On obtient encore que la seule solution de (10.10) est $u = 0$.

Par contre, ce résultat d'unicité n'est plus vrai si on ne demande pas à u d'être de carré intégrable. En effet, les fonctions constantes sont toutes solutions de (10.10) (et on peut montrer que ce sont les seules fonctions, de classe C^2 et bornées, solutions de (10.10)).

5.6 Fonction caractéristique d'un vecteur aléatoire

Définition 10.4 Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé, $d \geq 1$ et X un v.a. de dimension d . On appelle fonction caractéristique de X la fonction de \mathbb{R}^d dans \mathbb{C} définie par :

$$\varphi_X(u) = \int_{\Omega} e^{iX \cdot u} dP = E(e^{iX \cdot u}), \text{ pour } u \in \mathbb{R}^d.$$

Dans la définition précédente, la fonction $e^{iX \cdot u}$ est bien intégrable sur Ω (pour tout $u \in \mathbb{R}^d$) car la fonction $x \mapsto e^{ix \cdot u}$ est continue bornée de \mathbb{R}^d dans \mathbb{C} . En notant p_X la loi de X , on remarque également que $\varphi_X = (2\pi)^{d/2} \hat{p}_X(-\cdot)$. La section 10.3 donne alors quelques propriétés élémentaires de la fonction caractéristique d'un v.a..

Proposition 5.10 Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé, $d \geq 1$ et X un v.a. de dimension d . La fonction caractéristique de X vérifie alors les propriétés suivantes :

1. $\varphi_X \in C_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$.
2. La loi de X est entièrement déterminée par φ_X (c'est-à-dire que si Y est un autre v.a. de dimension d et que $\varphi_X = \varphi_Y$, on a nécessairement $p_X = p_Y$).

3. Si $\varphi_X \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$, la loi de X a une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, c'est-à-dire $p_X = f\lambda_d$, et :

$$f(x) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix \cdot u} \varphi_X(u) du, \quad \lambda_d\text{-p.s. en } x \in \mathbb{R}^d.$$

DÉMONSTRATION : Comme $\varphi_X = (2\pi)^{d/2} \hat{p}_X(-\cdot)$, le premier item est donnée par la proposition 10.7 (qui donne $\hat{p}_X \in C_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$).

Le deuxième item est donnée par le premier item de la proposition 10.8.

Pour le troisième item, on remarque que le deuxième item de la proposition 10.8 donne $p_X = f\lambda_d$ avec $f = \hat{p}_X(-\cdot)$, ce qui donne λ_d -p.s. en $x \in \mathbb{R}^d$:

$$f(x) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix \cdot t} \hat{p}_X(t) dt = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix \cdot t} \varphi_X(t) dt.$$

■

Les fonctions caractéristiques peuvent être utilisées pour montrer l'indépendance de v.a.r. (ou de v.a.). on donne un exemple dans la proposition suivante.

Proposition 5.11 Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé, $d > 1$ et X_1, \dots, X_d d v.a.r. Alors, les v.a.r X_1, \dots, X_d sont indépendantes si et seulement si on a $\varphi_X(u) = \prod_{j=1}^d \varphi_{X_j}(u_j)$ pour tout $u = (u_1, \dots, u_d)^t \in \mathbb{R}^d$, où X est la v.a. de composantes X_1, \dots, X_d .

DÉMONSTRATION : D'après le théorème 9.2 les v.a.r. X_1, \dots, X_d sont indépendantes si et seulement $p_X = p_{X_1} \otimes \dots \otimes p_{X_d}$. Par la proposition 10.8, ces deux mesures sont égales si et seulement si leurs transformées de Fourier sont égales, c'est-à-dire si et seulement si :

$$\varphi_X(u) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix \cdot u} d(p_{X_1} \otimes \dots \otimes p_{X_d}) \text{ pour tout } u \in \mathbb{R}^d.$$

Comme $e^{ix \cdot u} = \prod_{j=1}^d e^{ix_j u_j}$ pour tout $x = (x_1, \dots, x_d)^t$ et tout $u = (u_1, \dots, u_d)^t$, la définition de la mesure produit donne

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{ix \cdot u} d(p_{X_1} \otimes \dots \otimes p_{X_d}) = \prod_{j=1}^d \varphi_{X_j}(u_j),$$

ce qui termine la démonstration de cette proposition. ■

Il est intéressant aussi de connaître le lien entre convergence en loi et convergence simple des fonctions caractéristiques. Nous donnons ce lien dans le deuxième item du théorème 10.3 (dû à Paul Lévy).

Théorème 5.3 (Convergence en loi et fonctions caractéristiques) Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé, $d \geq 1$ et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. de dimension d .

1. On suppose que la fonction caractéristique de X_n converge simplement (quand $n \rightarrow \infty$) vers une fonction φ continue en 0. Il existe alors un v.a. X t.q. $X_n \rightarrow X$ en loi, quand $n \rightarrow \infty$.
2. Soit X un v.a. de dimension d . Alors, $X_n \rightarrow X$ en loi, quand $n \rightarrow \infty$, si et seulement si $\varphi_{X_n}(u) \rightarrow \varphi_X(u)$, quand $n \rightarrow \infty$, pour tout $u \in \mathbb{R}^d$.

DÉMONSTRATION : Le deuxième item du théorème est une conséquence facile du premier item. En effet, si $X_n \rightarrow X$ en loi, on a, bien sûr, $\varphi_{X_n}(u) \rightarrow \varphi_X(u)$ pour tout $u \in \mathbb{R}^d$ (car la fonction $x \mapsto e^{ix \cdot u}$ est continue et bornée de \mathbb{R} dans \mathbb{C} , pour tout $u \in \mathbb{R}^d$). Réciproquement, on suppose que $\varphi_{X_n}(u) \rightarrow \varphi_X(u)$ pour tout $u \in \mathbb{R}^d$. Comme la fonction φ_X est continue (et donc, en particulier continue en 0), le premier item donne que X_n converge en loi vers un v.a. Y . Mais ceci donne que X et Y ont même fonction caractéristique et donc même loi. On en déduit bien que X_n tend vers X en loi.

Nous démontrons maintenant le premier item du théorème 10.3. Cette démonstration se fait en deux étapes. Dans la première étape on montre que la suite des lois des X_n est tendue (on utilise ici le lemme 10.1 et la continuité de φ). Puis dans la seconde étape on conclut grâce à la proposition 9.6.

Étape 1. On montre dans cette étape que la suite des lois des X_n est tendue. Pour cela, il suffit de montrer que la suite des lois de chaque composante des X_n est tendue. Soit donc $i \in \{1, \dots, d\}$ et $(X_n^{(i)})_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des i -ème composantes des X_n . On note m_n la loi de $X_n^{(i)}$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\psi_n(t) = \frac{1}{2} \varphi_{X_n^{(i)}}(t) + \varphi_{X_n^{(i)}}(-t) = \sqrt{2\pi} \frac{\hat{m}_n(t) + \hat{m}_n(-t)}{2}$$

Le lemme 10.1 donne alors, pour tout $a > 0$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$m_n(\{x, |x| \geq a\}) \leq a \int_0^{2/a} (1 - \psi_n(t)) dt. \quad (10.11)$$

On a $\varphi_{X_n^{(i)}}(t) = \varphi_{X_n}(te_i)$ (ou e_i est le i -ème vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^d), la fonction $\psi_n(t)$ converge donc pour tout $t \in \mathbb{R}$ et sa limite est une fonction ψ (de \mathbb{R} dans \mathbb{R}) continue en 0. Comme $\psi_n(0) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a aussi $\psi(0) = 1$.

Soit $\varepsilon > 0$, comme ψ est continue en 0 et $\psi(0) = 1$, il existe $a_0 > 0$ t.q. $\max_{t \in [0, 2/a_0]} (1 - \psi(t)) \leq \varepsilon$, et donc

$$a_0 \int_0^{2/a_0} (1 - \psi(t)) dt \leq 2\varepsilon.$$

La fonction ψ_n converge simplement vers ψ et $0 \leq (1 - \psi_n) \leq 1$ le théorème de convergence dominée donne donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_0 \int_0^{2/a_0} (1 - \psi_n(t)) dt = a_0 \int_0^{2/a_0} (1 - \psi(t)) dt.$$

Il existe donc n_0 t.q.

$$n \geq n_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_0 \int_0^{2/a_0} (1 - \psi_n(t)) dt \leq 3\varepsilon.$$

Avec (10.11) on a donc

$$n \geq n_0 \Rightarrow m_n(\{x, |x| \geq a_0\}) \leq 3\varepsilon.$$

D'autre part, en utilisant la continuité décroissante d'une mesure, pour tout $n \in \{1, \dots, n_0 - 1\}$, il existe a_n t.q. $m_n(\{x, |x| \geq a_n\}) \leq 3\varepsilon$. En prenant $a = \max\{a_0, a_1, \dots, a_{n_0-1}\}$ on a donc

$$m_n(\{x, |x| \geq a\}) \leq 3\varepsilon \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

Ceci montre bien que la suite $(m_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est tendue et termine la première étape.

Étape 2. Dans cette seconde étape il suffit d'utiliser la proposition 9.6. Cette proposition nous donne l'existence d'une sous suite de la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et d'un v.a. X t.q. cette sous suite tend vers X en loi. On en déduit, en

particulier que $\varphi_X = \varphi$. Il reste à montrer que toute la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tend vers X en loi (et pas seulement une sous suite). Pour le montrer, on raisonne par l'absurde. Si la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne converge pas en loi vers X , il existe $\phi \in C_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ t.q. $E(\phi(X_n)) \not\rightarrow E(\phi(X))$. Il existe donc $\varepsilon > 0$ et une sous suite de la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, que nous noterons aussi $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ (pour ne pas alourdir les notations), t.q.

$$|E(\phi(X_n)) - E(\phi(X))| \geq \varepsilon. \quad (10.12)$$

Mais, la proposition 9.6 nous donne l'existence d'une sous suite de cette sous suite et d'un v.a. Y t.q. la sous suite de la sous suite tend vers Y en loi. Comme la convergence en loi donne la convergence simple des fonctions caractéristiques (et que $\varphi_{X_n} \rightarrow \varphi$ simplement), on en déduit que $\varphi_Y = \varphi = \varphi_X$. On a donc $P_X = P_Y$. La sous suite de la sous suite tend donc vers X en loi. En contradiction avec (10.12). On a bien ainsi montré finalement que $X_n \rightarrow X$ en loi. ■

On donne maintenant la fonction caractéristique d'un vecteur gaussien.

Proposition 5.12 Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé.

1. Soit X une v.a.r. gaussienne. On note m son espérance (donc, $m = E(X) \in \mathbb{R}$) et σ^2 sa variance (donc, $\sigma^2 = E((X - m)^2) \geq 0$) de sorte que $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$. On a alors :

$$\varphi_X(u) = e^{imu} e^{-\frac{\sigma^2}{2} u^2}, \text{ pour tout } u \in \mathbb{R}.$$

2. Soit $d \geq 1$ et X une v.a. gaussienne de dimension d . On note m son espérance (donc, $m = E(X) \in \mathbb{R}^d$) et D sa matrice de covariance (donc, D est une matrice symétrique, semi-définie positive, son terme à la ligne j et la colonne k est donné par la covariance des composantes d'indices j et k de X) de sorte que $X \sim \mathcal{N}(m, D)$ (proposition 9.11). On a alors :

$$\varphi_X(u) = e^{im \cdot u} e^{-\frac{1}{2} D u \cdot u}, \text{ pour tout } u \in \mathbb{R}^d.$$

DÉMONSTRATION : Soit X une v.a.r. gaussienne, $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$. On suppose tout d'abord que $\sigma^2 = 0$, on a alors $X = m$ p.s. et donc, pour tout $u \in \mathbb{R}$, $\varphi_X(u) = e^{imu}$, ce qui est bien la formule annoncée. On suppose maintenant que $\sigma > 0$, on a alors, pour tout $u \in \mathbb{R}$:

$$\varphi_X(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{ixu} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right) dx.$$

Avec le changement de variable $y = \frac{x-m}{\sigma}$, on obtient :

$$\varphi_X(u) = e^{imu} \int_{\mathbb{R}} e^{iy\sigma u} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy,$$

ce qui donne $\varphi_X(u) = e^{imu} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \psi(\sigma u)$ avec $\psi(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{iyt} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Comme la fonction $y \mapsto e^{y^2}$ est paire, on a aussi :

$$\psi(t) = \int_{\mathbb{R}} \cos(yt) e^{-\frac{y^2}{2}} dy, \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Pour calculer $\psi(t)$, on remarque que le théorème de dérivabilité sous le signe intégrale s'applique (théorème 4.10) et donne que ψ est de classe C^1 et

$$\psi'(t) = \int_{\mathbb{R}} (-y) \sin(yt) e^{-\frac{y^2}{2}} dy.$$

En intégrant par parties cette dernière intégrale (en fait, on intègre par parties sur $[-n, n]$ puis on fait tendre n vers l'infini), on obtient :

$$\psi'(t) = - \int_{\mathbb{R}} t \cos(yt) e^{-\frac{y^2}{2}} dy = -t\psi(t), \text{ pour tout } t \in \mathbb{R},$$

ce qui donne $\psi(t) = \psi(0)e^{-\frac{t^2}{2}}$. Comme $\psi(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \sqrt{2\pi}$, on en déduit que $\psi(t) = \sqrt{2\pi}e^{-\frac{t^2}{2}}$ (pour tout $t \in \mathbb{R}$) et donc que $\varphi_X(u) = e^{imu}e^{-\frac{\sigma^2 u^2}{2}}$, ce qui est bien la formule annoncée.

On suppose maintenant que $d > 1$ et que X est un v.a. gaussien. Soit $u \in \mathbb{R}^d$. On a $\varphi_X(u) = E(e^{iX \cdot u}) = \varphi_{X \cdot u}(1)$. Pour connaître $\varphi_X(u)$, il suffit donc de connaître la fonction caractéristique de la v.a.r. $X \cdot u$. Comme X est un v.a. gaussien, la v.a.r. $X \cdot u$ est une v.a.r. gaussienne. Sa moyenne est $E(X \cdot u) = E(X) \cdot u = m \cdot u$ et sa variance est (voir l'exercice 169) :

$$\sigma^2 = E((X \cdot u - m \cdot u)^2) = E(u^t (X - m)(X - m)^t u) = u^t \text{Cov}(X)u = u^t Du.$$

On a donc, d'après la première partie de cette démonstration (c'est-à-dire le cas $d = 1$),

$$\varphi_X(u) = \varphi_{X \cdot u}(1) = e^{im \cdot u} e^{-\frac{u^t Du}{2}},$$

ce qui est bien la formule annoncée (car $u^t Du = Du \cdot u$). ■

On montre enfin le théorème central limite.

Théorème 5.4 (Théorème central limite) Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé, $d \geq 1$ et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. de dimension d i.i.d.. On suppose que $E(|X_1|^2) < \infty$. On pose $E(X_1) = m$, $D = \text{Cov}(X_1)$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$Y_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n (X_i - m).$$

La suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge alors en loi vers tout v.a. Y dont la loi est la loi normale multidimensionnelle $\mathcal{N}(0, D)$. (Voir la définition 9.3 et la proposition 9.11 pour la définition de cette loi normale multidimensionnelle.)

DÉMONSTRATION : Soon... ■