

1.3 Intégrale doubles

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^2$

L'intégrale sur D de $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, s'appelle une intégrale double, on la note $\iint_D f = \iint_D f(x, y) dx dy$.

1.3.1 Théorème de Fubini

Théorème 1.3.1 Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

1) Cas où $D = [a, b] \times [c, d]$, $a \leq b$ et $c \leq d$, on a :

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy.$$

2) Cas où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; a \leq x \leq b, u(x) \leq y \leq v(x)\}$, où $u, v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sont continues, alors :

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[\int_{u(x)}^{v(x)} f(x, y) dy \right] dx$$

Proposition 1.3.2 Si $f(x, y) = g(x)h(y)$ avec $D = [a, b] \times [c, d]$, $a \leq b$ et $c \leq d$, on a :

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \left[\int_a^b g(x) dx \right] \times \left[\int_c^d h(y) dy \right].$$

Exemple 1.3.3 On calcule $I = \iint_D (xy) dx dy$, où $D = [1, 2] \times [3, 5]$

$$I = \left[\int_1^2 x dx \right] \times \left[\int_3^5 y dy \right] = \frac{3}{2} \times \frac{16}{2} = 12.$$

Exemple 1.3.4 On calcule $I = \iint_D dx dy$, où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\}$

$$\iint_D dx dy = \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} dy \right] dx = \int_0^1 (1 - x) dx = \frac{1}{2}$$

1.3.2 Changement de variable

Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^2$ et

$$\begin{aligned} \varphi : U &\rightarrow V \\ (u, v) &\rightarrow (x, y) \end{aligned}$$

une application de classe C^1 , et $\Delta \subset U$ et $D \subset V$

La matrice jacobien de φ est $j(\varphi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$

$$\det(j(\varphi)) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Si $\varphi(\Delta) = D$, on obtient:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\Delta} f(\varphi(u, v)) \det(j(\varphi)) du dv$$

1.3.3 Coordonnées polaires

$\varphi : (r, \theta) \rightarrow (x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$

La matrice jacobien de φ est $\frac{D(x, y)}{D(r, \theta)} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$

et $\left| \frac{D(x, y)}{D(r, \theta)} \right| = r$

Si $\varphi(\Delta) = D$, on obtient:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\Delta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) |r| dr d\theta$$

Exemple 1.3.5 On calcule $I = \iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2} dx dy$ où $D = \{(x, y) / x^2 + y^2 \leq 1\}$
et $\Delta = \{(r, \theta) / 0 \leq r \leq 1 \text{ et } 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$

$$I = \iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2} dx dy = \iint_{\Delta} \frac{r}{1+r^2} dr d\theta = \pi \ln 2$$

1.4 Intégrales triples

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^3$

L'intégrale sur D de $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, s'appelle une intégrale triple, on la note $\iiint_D f = \iiint_D f(x, y, z) dx dy dz$.

1.4.1 Théorème de Fubini

Théorème 1.4.1 Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

1) Cas où $D = [a, b] \times [c, d] \times [s, t]$, $a \leq b$, $c \leq d$ et $s \leq t$, on a :

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left[\int_c^d \left[\int_s^t f(x, y, z) dz \right] dy \right] dx.$$

2) Cas où $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x, y) \in \Delta, u(x, y) \leq z \leq v(x, y)\}$, où $u, v : D \rightarrow \mathbb{R}$

sont continues, D est un ensemble fermé borné de $\mathbb{R}^2$, alors :

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{\Delta} \left[\int_{u(x, y)}^{v(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dx dy.$$

3) Cas où $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; a \leq z \leq b, (x, y) \in \Delta(z)\}$, où $u, v : D \rightarrow \mathbb{R}$ sont continues, $D(z)$ est un ensemble fermé borné de $\mathbb{R}^2, \forall z \in [a, b]$, alors :

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left[\iint_{\Delta(z)} f(x, y, z) dx dy \right] dz.$$

Proposition 1.4.2 Si $f(x, y) = g(x)h(y)k(z)$ avec $D = [a, b] \times [c, d] \times [s, t]$, $a \leq b$, $c \leq d$ et $s \leq t$ on a :

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \left[\int_a^b g(x) dx \right] \times \left[\int_c^d h(y) dy \right] \times \left[\int_s^t k(z) dz \right].$$

Exemple 1.4.3 On calcule $\iiint_D (xyz) dx dy dz, D = [0, 1]^3$

$$\iiint_D (xyz) dx dy dz = \left[\int_0^1 x dx \right] \times \left[\int_0^1 y dy \right] \times \left[\int_0^1 z dz \right] = \frac{1}{8}.$$

Exemple 1.4.4 On calcule $\iiint_{\Delta} dx dy dz, \Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x, y) \in D = [0, 1]^2, 0 \leq z \leq x\}$