

Chapitre 2

Intégrale impropres

2.1 Intégrales impropres de fonctions définies sur un intervalle non borné

Soit $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable (au sens de Riemann) sur $[a, x]$, pour tout x dans $[a, +\infty[$. On pose

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

Définition 2.1.1 On dit que f admet une intégrale impropre convergente sur $[a, +\infty[$ si $F(x)$ admet une limite lorsque x tend vers $+\infty$ et on note

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt = \int_a^{+\infty} f(t) dt$$

Dans ce cas, on dit que f est semi-intégrable sur $[a, +\infty[$.

Exemple 2.1.2 Soit $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$, on a

$$\int_1^x f(t) dt = \frac{\ln x}{x} + 1 - \frac{1}{x}$$

c'est à dire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x f(t) dt = 1$
donc l'intégrale impropre de f est convergente sur $[1, +\infty[$.

Remarque 2.1.3 Si la fonction $f :]-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est intégrable (au sens de Riemann) sur $[x, b]$, pour tout x dans $]-\infty, b]$, on dit qu'elle admet une intégrale impropre convergente (ou qu'elle est semi-intégrable) sur $]-\infty, b]$ si la fonction $F(x) = \int_x^b f(t) dt$ admet une limite quand x tend vers $-\infty$ et on note

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^b f(t) dt = \int_{-\infty}^b f(t) dt$$

Remarque 2.1.4 Pour une fonction définie sur un intervalle ouvert $]-\infty, +\infty[$ et intégrable sur tout intervalle $[x, y]$, $-\infty < x < y < +\infty$, on dit que son intégrale impropre sur $]-\infty, +\infty[$ converge si, pour $-\infty < c < +\infty$, ses intégrales impropres sur $]-\infty, c]$ et $[c, +\infty[$ existent.

2.1.1 Intégrale impropre de fonctions positives

Proposition 2.1.5 Soient f et $g : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions à valeurs positives et intégrables sur tout intervalle borné de la forme $[a, \beta]$, $\forall \beta \in [a, +\infty[$. On suppose que $f \leq g$, alors

1) Si l'intégrale impropre de g est convergente sur $[a, +\infty[$, implique que l'intégrale impropre de f est convergente et on a

$$\int_a^{+\infty} f(t) dt \leq \int_a^{+\infty} g(t) dt$$

2) Si l'intégrale impropre de f est divergente sur $[a, +\infty[$, implique que l'intégrale impropre de g est divergente.

Corollaire 2.1.6 Soient f et $g : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions à valeurs positives et intégrables sur tout intervalle borné de la forme $[a, \beta], \forall \beta \in [a, +\infty[$. On suppose qu'il existe deux constantes c_1 et c_2 strictement positives telles que

$$c_1 f \leq g \leq c_2 f$$

Alors, l'intégrale impropre de f est convergente si et seulement si l'intégrale impropre de g est convergente.

Corollaire 2.1.7 Soient f et $g : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions à valeurs positives et intégrables sur tout intervalle borné de la forme $[a, \beta], \forall \beta \in [a, +\infty[$. On suppose qu'il existe $c \geq 0$ telle que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = c$$

Alors, l'intégrale impropre de f sur $[a, +\infty[$ est convergente si et seulement si celle de g est convergente.

Exemple 2.1.8 $f(x) = \frac{1}{t\sqrt{1+t^2}}, g(x) = \frac{1}{t^2}$ deux fonctions définies sur $[1, +\infty[$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

comme l'intégrale impropre de g sur $[1, +\infty[$ est convergente alors l'intégrale impropre de f sur $[1, +\infty[$ est convergente.

2.2 Intégrales impropres de fonctions définies sur un intervalle borné

Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable (au sens de Riemann) sur $[a, x]$, pour tout x dans $[a, b[$. On pose