$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

Définition 2.2.1 *On dit que f admet une intégrale impropre convergente sur $[a,b[$ si $F(x)$ admet une limite lorsque x tend vers b et on note*

$$\lim_{x\to b}\int_a^x f(t)\,dt=\int_a^b f(t)\,dt$$

Dans ce cas, on dit que f est semi-intégrable sur $[a,b[$.

Exemple 2.2.2 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{-x}}$ *une fonction définie sur $[-1,0[$, et on remarque que cette fonction est intégrable en sens Riemann sur $[-1,\alpha]$, $\forall\alpha\in[-1,0[$, et $\int_{-1}^x f(t)\,dt=-2\sqrt{-x}+2$ alors $\lim_{x\to 0}\int_{-1}^x f(t)\,dt=2$*

donc f admet une intégrale impropre convergente sur $[-1,0[$.

Remarque 2.2.3 *Si la fonction $f:]a,b]\to\mathbb{R}$ est intégrable(au sens de Riemann) sur $[x,b]$,pour tout x dans $]a,b]$, on dit qu'elle admet une intégrale impropre convergente (ou qu'elle est semi-intégrable) sur $]a,b]$ si la fonction $F(x)=\int_x^b f(t)\,dt$ admet une limite quand x tend vers a et on note*

$$\lim_{x\to a}\int_x^b f(t)\,dt=\int_a^b f(t)\,dt$$

Remarque 2.2.4 *Pour une fonction définie sur un intervalle ouvert $]a,b[$ et intégrable sur tout intervalle $[x,y], a<x<y<b$, on dit que son intégrale impropre sur $]a,b[$ converge si, pour $a<c<b$, ses intégrales impropres sur $]a,c]$ et $[c,b[$ existent.*

Exemple 2.2.5 *L'intégrale impropre $\int_{-1}^{+1}\frac{1}{1-t^2}dt$ est divergente car $\int_{-1}^{0}\frac{1}{1-t^2}dt$ est divergente.*

2.2.1 Intégrale absolument convergente

Définition 2.2.6 *Soit* $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ *une fonction intégrable sur tout intervalle de la forme* $[a, \alpha], \forall \alpha < b$. *On dit que l'intégrale impropre de f est absolument convergente sur* $[a, b[$ *si l'intégrale impropre de* $|f|$ *est convergente sur* $[a, b[$.

Exemple 2.2.7 *L'intégrale impropre sur* $]0, 1]$ *de la fonction* $f : x \to \dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}$ *est absolument convergente.*

car

$$0 \leq \int_0^1 \frac{|\cos x|}{\sqrt{x}} dx \leq \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

et $\int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt = 2 - 2\sqrt{x}$ *et* $\lim_{x \to 0} \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt = 2.$