

Chapitre 3

Equations différentielles

3.1 Rappel sur les équations différentielles ordinaires

3.1.1 Equations différentielles ordinaires d'ordre 1

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On appelle équation différentielle ordinaire du premier ordre une équation de la forme

$$y' = f(t, y)$$

on dit que la fonction dérivable, $y_0 : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une solution de l'équation différentielle d'ordre 1

$$y' = f(t, y)$$

sur I si

$$y_0'(t) = f(t, y_0(t)), \forall t \in I.$$

Exemple 3.1.1 La fonction $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x(t) = e^t$ est une solution de l'équation différentielle d'ordre 1 suivante:

$$y' = y$$

sur $\mathbb{R}$, car $x'(t) = e^t = x(t), \forall t \in \mathbb{R}$.

3.1.2 Equations différentielles de variables séparées

Une équation différentielle de 1^{er} ordre est dite à variables séparées si elle peut s'écrire sous la forme

$$f(y)y' = g(x)$$

donc

$$F(y) = G(x) + k, k \in \mathbb{R}.$$

(F est une primitive de f et G est une primitive de g)

donc

$$y = F^{-1}(G(x) + c)$$

Exemple 3.1.2 Résoudre sur $I = [2, +\infty[$ l'équation différentielle

$$xy' \ln x = (3 \ln x + 1)y$$

On peut séparer les variables (x et y) en divisant par $yx \ln x$,

$$\frac{y'}{y} = \frac{(3 \ln x + 1)}{x \ln x}$$

donc

$$\ln y = \int \frac{(3 \ln x + 1)}{x \ln x} dx + c, c \in \mathbb{R}.$$

c'est à dire

$$y = e^{\int \frac{(3 \ln x + 1)}{x \ln x} dx + c}, c \in \mathbb{R}.$$

3.2 Equation différentielle ordinaires linéaire

Définition 3.2.1 Une équation différentielle linéaire est une équation de la forme

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + \dots + a_n(x)y^{(n)} = f(x) \quad (3.1)$$

l'équation homogène associée est

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + \dots + a_n(x)y^{(n)} = 0 \quad (3.2)$$

Proposition 3.2.2 Si y_1 et y_2 deux solutions de (3.2). Alors $y_1 + y_2$ et αy_1 sont aussi deux solutions de (3.2).

Exemple 3.2.3 $y_1(x) = x$ et $y_2(x) = 5$ deux solutions de l'équation $y''' + y'' = 0$, alors $y_3(x) = x + 5$ et $y_4(x) = 10x$ sont aussi des solutions.

Proposition 3.2.4 Si S_0 est l'ensemble des solutions de (3.2) et y_p une solution particulière de (3.1), alors l'ensemble des solutions de (3.1) est donné par $S = \{y + y_p / y \in S_0\}$.

3.2.1 Equation différentielle linéaire du premier ordre 1

Définition 3.2.5 Une équation différentielle linéaire du premier ordre est une équation différentielle du premier ordre avec

$$x' = f(t).x + g(t)$$

avec f, g des fonctions continues sur $\mathbb{R}$. L'équation différentielle homogène associée est

$$x' = f(t).x$$

Exemple 3.2.6 L'équation différentielle

$$y' = t^2 y + t$$

est une equation différentielle linéaire d'ordre 1. L'équation différentielle homogène associée est

$$y' = t^2 y$$

Résolution d'une équation différentielle linéaire homogène

$$x' = f(t).x$$

c'est à dire $\frac{x'}{x} = f(t)$ donc

$$\ln |x| = \int f(t)dt + c, c \in \mathbb{R}$$

alors

$$x = ke^{\int f(t)dt}, k \in \mathbb{R}$$

Résolution d'une équation différentielle linéaire non homogène

$$x' = f(t).x + g(t)$$

Si x_p est une solution particulière de cette équation

alors

$$x(t) = ke^{\int f(t)dt} + x_p(t), k \in \mathbb{R}$$

Exemple 3.2.7 On considère l'équation

$$xy' + 2y = \frac{x^2}{x^2 + 1}$$

L'équation homogène associée est

$$xy' + 2y = 0$$

la solution générale de l'équation homogène est

$$y(x) = \frac{k}{x^2}, k \in \mathbb{R}$$

Solution particulière de l'équation non homogène

$$y_p(x) = \frac{k(x)}{x^2}$$

$$\text{donc } y'_p(x) = \frac{k'(x)x^2 - 2k(x)x}{x^4}$$

et on a aussi

$$xy'_p + 2y_p = \frac{x^2}{x^2 + 1}$$

on trouve

$$\begin{aligned} \frac{k'(x)x^2 - 2k(x)x}{x^3} + \frac{2k(x)}{x^2} &= \frac{x^2}{x^2 + 1} \implies \frac{k'(x)}{x} = \frac{x^2}{x^2 + 1} \\ \implies k'(x) &= \frac{x^3}{x^2 + 1} \\ \implies k'(x) &= \frac{x^3 + x - x}{x^2 + 1} \\ \implies k'(x) &= x - \frac{1}{2} \frac{2x}{x^2 + 1} \\ \implies k(x) &= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \end{aligned}$$

$$\text{donc } y_p(x) = \frac{k(x)}{x^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2x^2} \ln(x^2 + 1)$$

finalemt la solution générale l'équation non homogène est

$$y(x) = \frac{k}{x^2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2x^2} \ln(x^2 + 1), k \in \mathbb{R}.$$

3.2.2 Equation de Bernoulli

Définition 3.2.8 On appelle *équation de Bernoulli* une équation de la forme

$$x' = p(t)x + q(t)x^\alpha$$

avec $\alpha \in \mathbb{R} / \{1\}$ et p, q sont des fonctions continues.

On se place sur les intervalles où x ne s'annule pas. On peut alors diviser par x^α , et poser $z = x^{1-\alpha}$, on obtient alors

$$z' = (1 - \alpha)(p(t)z + q(t))$$

est une équation linéaire en z .

3.2.3 Equations différentielles linéaires d'ordre 2 (EDL d'ordre 2)

Définition 3.2.9 Une EDL du $\mathcal{E}^{me}$ ordre à coefficients constants est une équation différentielle de la forme

$$ay'' + by' + cy = f(x) \tag{E}$$

ou $a, b, c \in \mathbb{R} (a \neq 0)$ et $f \in C^0(I)$ (I ouvert de $\mathbb{R}$). L'équation homogène (ou sans second membre) associée est

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{EH}$$

Proposition 3.2.10 Si y_h est une solution générale de (EH) et y_p est une solution particulière de (E). Alors $y_p + y_h$ est une solution générale de (E)

Résolution de l'équation homogène associée (E.H.)

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{EH}$$