2 Séries entières

Dans cette partie on ne traite que l'aspect série entière pas l'aspect fonctions développables en séries entières même si le dernier résultat énoncé en est très proche.

2.1 Définitions

Définition 2.1 *Soit (a_n) une suite réelle. On appelle série entière de terme général (a_n) la fonction définie par*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Définition 2.2 *Soit (a_n) une suite réelle et $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ sa série entière associée. On appelle rayon de convergence de la série la borne sup de l'ensemble suivant $\{x \geq 0, (a_n x^n) \text{ est bornée}\}$. On le note R, si $R = \infty$ on dit que le rayon est infini, si $R \in \mathbb{R}^*$ alors par définition on vérifie :*

$$\text{si } |x| < R \text{ alors la suite } (a_n x^n) \text{ est bornée}$$
$$\text{si } |x| > R \text{ alors la suite } (a_n x^n) \text{ n'est pas bornée.}$$

Proposition 2.3
- *Si $R = 0$ alors la série entière n'est définie que pour $x = 0$, elle est grossièrement divergente pour tout $x \neq 0$.*
- *Si $R = \infty$ alors la série entière converge absolument pour tout $x \in \mathbb{R}$.*
- *Si $R \in]0, +\infty[$, alors la série entière converge absolument pour tout $x \in]-R, R[$, elle diverge grossièrement pour tout $|x| > R$.*

Attention on ne sait pas ce qui se passe si $|x| = R$.

Exemples :

- On pose $a_n = \frac{1}{n}$.
- On pose $a_n = \frac{2^n}{n^2}$.
- On pose $a_n = n!$.
- On pose $a_n = n$.
- On pose $a_n = \frac{1}{n!}$.

2.2 Propriétés

On commence par donner un critère permettant de calculer les rayons de convergence :

Proposition 2.4 *(Critère de "d'Alembert")*
Soit (a_n) une suite réelle ne s'annulant jamais. Si la suite $\left(\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right)$ converge vers une limite l, alors le rayon de la série entière de terme général (a_n) est $R = \frac{1}{l}$.

Nous allons donner plusieurs résultats sur la somme et le produit de série entière.

Proposition 2.5 *(somme de deux séries entières)*
Soient R et R' les rayons respectifs des séries entières de termes généraux (a_n) et (b_n) alors :
- *Si $R < R'$ alors la série entière de terme général $(a_n + b_n)$ a pour rayon R.*
- *Si $R = R'$ alors la série entière de terme général $(a_n + b_n)$ a un rayon supérieur ou égal à R.*

Exemple :
On pourra regarder les cas où $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = 2^n$ et $c_n = \frac{(n-1)! - 1}{n!}$.

On définit le produit de deux séries entières de la façon suivante :

Définition 2.6 *(Produit de Cauchy) Soient deux séries entières de termes généraux (a_n) et (b_n), on appelle produit de Cauchy de ces deux séries la série de terme général (c_n) défini par :*

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Formellement cela revient à mettre pour la puissance n tout ce qui peut donner de la puissance n à partir des deux premières séries.
On a alors le résultat suivant.

Proposition 2.7 *Soient deux séries entières de termes généraux (a_n) et (b_n) de rayon de convergence respectifs R et R', on note (c_n) le terme général de leur produit de Cauchy. Le rayon de convergence du produit de Cauchy est alors supérieur ou égal au minimum de R et R'. De plus pour tout $|x| < Min\{R, R'\}$,*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n . \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n.$$

Pour finir nous allons donner un résultat de régularité.

Proposition 2.8 *Soit une série entière de terme général (a_n) et de rayon de convergence $R > 0$. Alors si on note $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ pour tout $x \in]-R, R[$, la fonction f est de classe C^∞ sur $]-R, R[$. De plus la série de terme général*