5.4 Transformation de Fourier dans L^2

On aimerait ici définir la transformée de Fourier d'un élément de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N) = L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$. On rappelle que l'espace $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ est un espace de Hilbert et que le produit scalaire sur $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ est défini par (en notant $dt = d\lambda_N(t)$) :

$$(f/g)_2 = \int f(t)\overline{g(t)}dt.$$

Il est clair que la définition de $\hat{f}$ qu'on a donnée pour $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ ne s'applique pas pour un élément de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$. Pour définir la transformée de Fourier d'un élément de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$, on va utiliser la densité de $\mathcal{S}_N$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ (on peut montrer que $\mathcal{S}_N \subset L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$, comme on a montré que $\mathcal{S}_N \subset L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$). On va d'abord remarquer que la transformée de Fourier envoie $\mathcal{S}_N$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ et que c'est une isométrie pour la norme de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$. On utilisera ensuite la densité de $\mathcal{S}_N$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ pour définir la transformée de Fourier des éléments de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$.

Proposition 5.9 *Soit $N \geq 1$ et $f, g \in \mathcal{S}_N$ (on a donc, en particulier, $f, g \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$). Alors $\hat{f}, \hat{g} \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ et $(f/g)_2 = (\hat{f}/\hat{g})_2$. En particulier, $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$.*

DÉMONSTRATION : Soit $f, g \in \mathcal{S}_N$. Comme $f, \hat{f} \in \mathcal{S}_N \subset L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$, on peut appliquer le théorème d'inversion (théorème 10.1). Il donne $f = \hat{\hat{f}}(-\cdot)$ et donc :

$$(f/g)_2 = \int \hat{\hat{f}}(-t)\bar{g}(t)dt = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int \left(\int e^{ix\cdot t}\hat{f}(x)dx \right) \bar{g}(t)dt.$$

On utilise maintenant le théorème de Fubini (théorème 7.3). Il s'applique car $\hat{f}, \bar{g} \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$. On obtient :

$$(f/g)_2 = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int \left(\int e^{ix\cdot t}\bar{g}(t)dt \right) \hat{f}(x)dx = \int \bar{\hat{g}}(t)\hat{f}(t)dt = (\hat{f}/\hat{g})_2,$$

ce qui termine la démonstration. ■

La proposition 10.9 permet de définir, par un argument de densité, la transformée de Fourier dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$.

Théorème 5.2 *Soit $N \geq 1$. Il existe une application linéaire continue $\bar{F}$ de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ t.q. :*

1. Si $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N) \cap L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$, on a alors $\bar{F}(f) = \hat{f}$ p.p..

2. Pour tout $f, g \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$, on a $(f/g)_2 = (\bar{F}(f)/\bar{F}(g))_2$.

3. Pour tout $f \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$, on a $f = \bar{F}(\bar{F}(f))(-\cdot)$.

4. $\bar{F}$ est une bijection de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$.

Pour $f \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$, $\bar{F}(f)$ s'appelle la transformée de Fourier de f. Compte tenu du premier item, on notera en général, $\hat{f}$ la transformée de Fourier de f si $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ (et alors $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$) ou si $f \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ (et alors $\hat{f} \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$).

DÉMONSTRATION : L'application $f \mapsto \hat{f}$ est définie sur $\mathcal{S}_N$, qui est un sous espace de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$, et prend ses valeurs dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ (car $\mathcal{S}_N \subset L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$, en confondant, comme d'habitude, un élément de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ avec l'un de ses représentants). Comme cette application est linéaire, continue pour la norme de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$, et que $\mathcal{S}_N$ est dense dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ (car $\mathcal{S}_N \supset C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ et $C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ est dense dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$, voir le théorème 8.4), on en déduit que cette application se prolonge en une application, notée $\bar{F}$, de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$.

Plus précisément, soit $f \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$. Il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}_N$ t.q. $f_n \to f$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ quand $n \to \infty$. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc de Cauchy dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$. La proposition 10.9 donne alors que la suite $(\hat{f}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc aussi de Cauchy dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$. Elle converge donc dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$. On aimerait définir $\bar{F}(f)$ comme étant la limite (dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$) de la suite $(\hat{f}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ceci est possible à condition que cette limite ne dépende que de f et pas du choix de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ vers f. Or, ce dernier point est facile car si $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une autre suite convergeant dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ vers f, on a $\|\hat{f}_n - \hat{g}_n\|_2 = \|f_n - g_n\|_2 \to 0$ quand $n \to \infty$. On a ainsi défini $\bar{F}$ de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ dans lui même.

La linéarité de $\bar{F}$ découle immédiatement du fait que l'application $f \mapsto \hat{f}$ est linéaire de $\mathcal{S}_N$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$. Enfin, soit $f \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}_N$ t.q. $f_n \to f$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$. La proposition 10.9 donne que $\|\hat{f}_n\|_2 = \|f_n\|_2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En passant à la limite quend $n \to \infty$, on en déduit $\|\bar{F}(f)\|_2 = \|f\|_2$. Ce qui prouve la continuité de $\bar{F}$ de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$. On montre maintenant les 4 items du théorème.

1. Soit $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N) \cap L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$. En reprenant la démonstration du théorème 8.4, il est facile de voir qu'Il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ t.q. $f_n \to f$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ et $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ lorsque $n \to +\infty$ (car dans la démonstration du théorème 8.4, la suite construite pour converger vers f dans L^p ne dépend pas de p). On en déduit que $\hat{f}_n \to \hat{f}$ uniformément sur $\mathbb{R}^N$ lorsque $n \to +\infty$ (car $f_n \to f$ dans $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$) et que $\hat{f}_n \to \bar{F}(f)$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ lorsque $n \to +\infty$ (car $f_n \to f$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$) et donc que, après extraction éventuelle d'une sous suite, on peut supposer que $\hat{f}_n \to \bar{F}(f)$ p.p. quand $n \to \infty$. On en déduit bien que $\hat{f} = \bar{F}(f)$ p.p..
2. Soit $f, g \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$. Il existe deux suites $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}_N$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}_N$ t.q. $f_n \to f$, $g_n \to g$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$. La proposition 10.9 donne $(\hat{f}_n/\hat{g}_n)_2 = (f_n/g_n)_2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En passant à la limite quand $n \to \infty$ on obtient bien $(\overline{F}(f)/\overline{F}(g))_2 = (f/g)_2$.
3. Soit $f \in L^2$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}_N$ t.q. $f_n \to f$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ quand $n \to \infty$. On a donc $\hat{f}_n \to \bar{F}(f)$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$, ce qui donne aussi $\hat{f}_n(-\cdot) \to \bar{F}(f)(-\cdot)$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ et donc $\hat{\hat{f}}_n(-\cdot) \to \overline{F}(\overline{F}(f))(-\cdot)$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ quand $n \to +\infty$. La proposition 10.6 donne $f_n = \hat{\hat{f}}_n(-\cdot)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit donc (par unicité de la limite dans L^2) que $f = \overline{F}(\overline{F}(f))(-\cdot)$ p.p..
4. L'injectivité de $\bar{F}$ (de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$) découle du fait que $\|\bar{F}(f)\|_2 = \|f\|_2$ et que $\bar{F}$ est linéaire. La surjectivité est une conséquence immédiate du troisième item.

■

5.5Résolutiond'uneEDOoud'uneEDP

On donne ici deux exemples simples d'utilisation de la transformation de Fourier pour la résolution d'une équation différentielle (souvent notée EDO pour Equation Différentielle Ordinaire) ou d'une équation aux dérivées partielles (souvent notée EDP pour Equation aux Dérivées Partielles).

Soit $N \geq 0$, $(a_0, \ldots, a_N) \in \mathbb{R}^{N+1}$ et $g \in \mathcal{S}_1$ (donnés). On cherche $f \in \mathcal{S}_1$ qui vérifie :

$$a_N f^{(N)}(x) + \ldots + a_1 f'(x) + a_0 f(x) = g(x), \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}. \tag{10.5}$$

Si $f \in \mathcal{S}_1$ vérifie (10.5), elle vérifie nécessairement, par transformation de Fourier :

$$a_N \widehat{f^{(N)}}(t) + \ldots + a_1 \widehat{f}'(t) + a_0 \hat{f}(t) = \hat{g}(t), \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}. \tag{10.6}$$

c'est-à-dire :

$$a_N (it)^N \hat{f}(t) + \ldots + a_1 it \hat{f}(t) + a_0 \hat{f}(t) = \hat{g}(t), \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}. \tag{10.7}$$