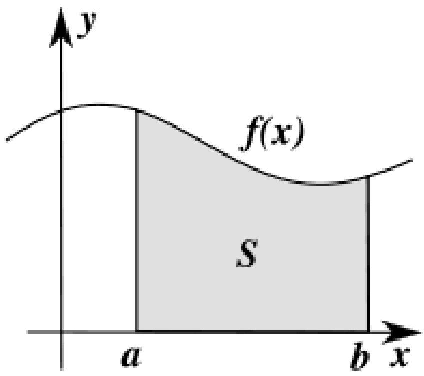
Analyse 02



Mahdi Fatima Zohra
Université Ahmed Zabana-Relizane
Faculté des sciences et technologie
Département Mathématiques Informatiques
mahdifatimazohra@yahoo.fr

20-04-2022
5.0

Table des matières

Objectifs 3

Introduction 4

I - **Chapitre 01 : Intégrale indéfinie** 5

1. Notion de primitive ... 5
2. Calcule de primitives ... 5
3. Quelques méthodes d'intégration ... 8

3.1. Primitives quasi immédiates ... 8
3.2. Méthode d'intégration par parties ... 8
3.3. Méthode d'intégration par changement de variables ... 9
3.4. Intégration des fractions rationnelles ... 9
3.5. Itégration des fonctions trigonométriques ... 11

4. Exercices ... 13

4.1. Exercice ... 13

II - **Chapitre 02 : Intégrale définie** 14

1. L'intégrale d'une fonction en escalier ... 14
2. Intégration d'une fonction bornée ... 15
3. Calcule de l'intégrale définie ... 17
4. Exercices ... 19

4.1. Exercice ... 19

Bibliographie 20

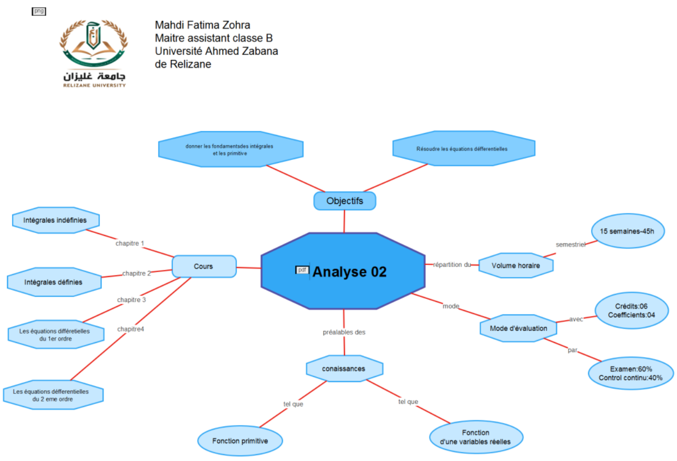
Webographie 21

Objectifs

- Déterminer une primitive
- Notation intégrale
- Propriétés de l'intégrale
- Résoudre un problème à l'aide du calcul intégral.

Introduction

Le cours est divisé en deux parties principales : Intégrale indéfinie , intégrale définie. Ces deux parties installent et/ou précisent des concepts d'analyse mathématique (Analyse II) tout à fait classiques et abondamment utilisés dans tout cursus d'études tel que la physique, la chimie, la biologie ,......,ect. le premier étant une introduction aux intégrales indéfinies et leur propriétés, ainsi que les méthodes et techniques de calcule de primitives. Dans le deuxième chapitre, on passe à l'étude des intégrales définie à savoir l'intégrale de Riemann, tout en passant par les sommes de Darboux, somme de Riemann et leur propriétés .



Carte conceptuelle

Chapitre 01 : Intégrale indéfinie

I

1. Notion de primitive

Définition

Soit f une fonction définie et continue sur $[a, b]$. On appelle primitive de la fonction f, toute fonction F définie sur $[a, b]$ tel que :

$$\forall x \in [a, b], F'(x) = f(x).$$

Exemple

Pour $x \in \mathbb{R}$, soit $f(x) = 2x$ .Alors la primitive de f est la fonction $F(x) = x^2$.

Définition

L'ensemble des primitives d'une fonction f sur $[a, b]$, s'appelle intégrale indéfinie de f, noté $\int f(x)dx$.

On a: $\int f(x)dx = F(x) + c, c \in \mathbb{R}$.

Exemple

$\forall x \in [1, 2] \ : \int \frac{1}{x} dx = \ln x + c, c \in \mathbb{R}.$

Fondamental

Toute fonction **continue** sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle.

2. Calcule de primitives

Fondamental : Primitives des fonctions usuelles

On récupère les formules de dérivées des chapitres antérieurs et on les inverse. On obtient les formulaires de primitives ci-dessous. Le premier concerne les « fonctions puissances ».

Fonction	Une primitive	Intervalle	Commentaire
k	kx	$\mathbb{R}$	
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$	$]0,+\infty[$	
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$	$n\in\mathbb{N}$
$\frac{1}{x^n}$	$\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}}$	$\mathbb{R}^{-*}$ ou $\mathbb{R}^{+*}$	$n\in\mathbb{N}/\{0,1\}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$]0,+\infty[$	
x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$]0,+\infty[$	$\alpha\in\mathbb{R}/-1$

Fondamental

Le deuxième formulaire concerne les « fonctions exponentielles » et apparentées.

Fonction	Une primitive	Intervalle	Commentaire
e^x	e^x	$\mathbb{R}$	
$e^{\alpha x}$	$\frac{e^\alpha}{\alpha}$	$\mathbb{R}$	$\alpha\in\mathbb{C}^*$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a}$	$\mathbb{R}$	$a>0$ et $a\neq1$
$sh(x)$	$ch(x)$	$\mathbb{R}$	
$ch(x)$	$sh(x)$	$\mathbb{R}$	
$\frac{1}{ch^2(x)}$	$th(x)$	$\mathbb{R}$	
$th(x)$	$\ln(ch(x))$	$\mathbb{R}$	

Fondamental

Le troisième concerne la « trigonométrie circulaire » et trigonométriques réciproques.

Fonction	Une primitive	Intervalle	Commentaire
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\mathbb{R}$	
$\tan(x)$	$-\ln(\cos(x))$	$]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi[$	$k \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$	$]-1,1[$	
$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\arcsin(\frac{x}{a})$	$]-a,a[$	$a > 0$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$	
$\frac{1}{a^2+x^2}$	$\frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a})$	$\mathbb{R}$	$a \neq 0$

Exemple

- Soit $f(x)=x^3$. D'après la formule $f(x)=x^n$, on a $f(x)=\frac{x^4}{4}$.
- Soit $f(x)=\frac{1}{9+x^2}$. D'après la formule $f(x)=\frac{1}{a^2+x^2}$ on a $\arctan(\frac{x}{3})$.

Méthode

Si f et g sont deux fonctions admettant des primitives sur $[a, b]$, alors $f \pm g$ et αf où $\alpha \in \mathbb{R}$ admettant des primitives aussi et on a

- $\int f(x) \pm g(x) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$.
- $\int \alpha f(x) dx = \alpha \int f(x) dx$.
- $(\int f(x) dx)' = f(x)$.
- Si $\int f(x) dx = F(x)+c$, *alors* $\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b)+c$, $c \in \mathbb{R}$.

Exemple

Calculer $\int 7x^2 dx$

$\int 7x^2 dx = 7\int x^2 dx = \frac{7}{3}x^3 + c$.

3. Quelques méthodes d'intégration

3.1. Primitives quasi immédiates

Méthode

Fonction	Une primitive	Commentaire
$f'(x)(f(x))^n$	$\frac{(f(x))^{n+1}}{n+1}+c$	$n\in\mathbb{R}/\{-1\}$
$\frac{f'(x)}{(f(x))^n}$	$\frac{-1}{(n-1)(f(x))^{(n-1)}}+c$	$n\in\mathbb{N}/\{0,1\}$
$\frac{f'(x)}{f(x)}$	$\ln\|f(x)\|+c$	
$\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}$	$2\sqrt{f(x)}+c$	
$f'(x)\cos(f(x))$	$\sin(f(x))+c$	
$f'(x)\sin(f(x))$	$-\cos(f(x))+c$	

Exemple

1. Calculer $\int 2x(x^2-7)^6 dx$

   On pose $f(x)=x^2-7$, alors $f'(x)=2x$.

   Ainsi, $\int 2x(x^2-7)^6 dx=\frac{(x^2-7)^7}{7}+c,\ c\in\mathbb{R}$.

2. Determiner $\int \frac{3x^2}{5x^2-1}dx$

   $\int \frac{3x^2}{5x^2-1}dx=\frac{3}{10}\int \frac{10}{3}\frac{3x^2}{5x^2-1}dx=\frac{3}{10}\int \frac{10x}{5x^2-1}dx=\frac{3}{10}\ln|5x^2-1|+c$.

3.2. Méthode d'intégration par parties

Fondamental

Soient u, v deux fonctions dérivables sur un intervalle I . On a alors:

$$\int u(x)v'(x)dx=u(x)v(x)-\int u'(x)v(x)dx$$

Complément

En effet

$$u(x)v(x) = \int [u(x)v(x)]'dx = \int u'(x)v(x)dx + \int u(x)v'(x)dx.$$

Exemple

Calculer $\int x\, e^x\, dx$

Posons : $u=x\,.On\,a: u'=1. Possons: v'=e^x\cdot On\,a: v=e^x$.

Nous obtenons, $\int x\,e^x\,dx = xe^x - \int 1.\,e^x\,dx = xe^x - e^x + c = (x-1)e^x + c\,,\, c \in \mathbb{R}$.

3.3. Méthode d'intégration par changement de variables

Fondamental

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et φ une fonction de classe C^1 sur un intervalle J avec $\varphi(J)\in I$.

On a alors la formule de changement de variable

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt .$$

Complément

Soient f une fonction continue sur I et $\psi : J \rightarrow I$ une fonction inversible

telle que $\psi \in C^1(J)$. Alors, en posant $x=\psi(t)$, on obtient la formule

$$\int f(x)\,dx = \int f(\psi(t))\,\psi'(t)\,dt = \int g(t)\,dt = G(t)+c$$

avec $t=\psi^{-1}(x)$, d'où $\int f(x)\,dx = G(\psi^{-1}(x))+c$.

Exemple

Calculer $\int \sqrt{\sin(x)}\cos(x)\,dx$

en posant $x=\sin(x) \Rightarrow dx=\cos(x)$, on obtient

$$\int \sqrt{\sin(x)}\cos(x)\,dx = \int \sqrt{t}\,dt = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+c = \frac{2}{3}\sin^{\frac{3}{2}}(x)+c \,, c \in \mathbb{R}.$$

3.4. Intégration des fractions rationnelles

Définition

Une fraction rationnelle est une fonction f ,quotient de deux fonctions polynomes

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_0+a_1x+........+a_mx^m}{b_0+b_1x+........+a_nx^n}$$

où $a_0, a_{1,.......}, a_m, b_0, b_1, ..., b_n$, sont des coefficients réels, $n = degrè\ de\ P\ et\ m = degrè\ de\ Q\,,\, m\,,n \in \mathbb{N}$.

1. Si $m \geq n$, alors la fraction peut s'écrire comme la somme d'un polynome et une fraction rationnelle
   $\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}\,, où\, deg(R) < deg(Q)$

Exemple

Calculer $\int \frac{2x^3+x-3}{x^2+1}dx$

On a $\int \frac{2x^3+x-3}{x^2+1}dx = 2x + \frac{-x-3}{x^2+1}$

$\int \frac{2x^3+x-3}{x^2+1}dx = \int 2x\,dx - \int \frac{x}{x^2+1}dx - \int \frac{3}{x^2+1}dx = x^2 - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - 3\arctan(x) + c$.

2. Si $m<n$, la fraction $\frac{P(x)}{Q(x)}$ est formée de termes appelé éléments simples de la forme

- $\frac{A}{(x-x_0)^k}$, $A, x_0 \in \mathbb{R}$ *et* $k \in \mathbb{N}^*$.
- $\frac{bx+c}{(x^2+px+q)^l}$, $b, c, p, q \in \mathbb{R}$ *et* $l \in \mathbb{N}^*$.

Intégration des éléments simples de première espèce

Pour les intégrales de la forme $\frac{A}{(x-x_0)^k}$, on a deux cas:

1. $\int \frac{A}{x-x_0}dx = A\ln|x-x_0| + c,\ c \in \mathbb{R},\ k=1$.
2. $\int \frac{A}{(x-x_0)^k}dx = \frac{A(x-x_0)^{-k+1}}{-k+1} + c,\ c \in \mathbb{R},\ k>1$.

Exemple

Calculer $\int \frac{4}{(x-3)^2}dx$

$On\ a \int \frac{4}{(x-3)^2}dx = \frac{4(x-3)^{-1}}{-1} + c,\ c \mathbb{R}$.

Intégration des éléments simples de deuxième espèce

Pour les intégrales de la forme $\int \frac{bx+c}{x^2+px+q}dx$

Sachant $p^2-4q<0 \Leftrightarrow q-\frac{p^2}{4}>0\ et\ en\ posant\ a=\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}$, on peut écrire

$x^2+px+q = (x+\frac{p}{2})^2 + (q-\frac{p^2}{4}) = (x+\frac{p}{2})^2 + a^2$

Pour le calcul de l'intégrale on pose $t = x+\frac{p}{2}\ et\ on\ a\ dt = dx$.

3.5. Itégration des fonctions trigonométriques

Fractions rationnelles en sin x, cos x et tan x

On veut calculer des primitives où des intégrales de fonctions du type $x \to R(\cos x, \sin x, \tan x)$ où R est une fraction rationnelle. On dispose du changement de variable $t=\tan(\frac{x}{2})$. *On obtient* $dt=\frac{1}{2}(1+\tan^2(\frac{x}{2}))dx$ *où encore* $dx=\frac{2\,dt}{1+t^2}$. D'autre part, on rappelle que

$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$ *et* $\tan x=\frac{2t}{1-t^2}$. L'effet du changement

de variables est donc de ramener le calcul des primitives de la fonction $x \to R(\cos x, \sin x, \tan x)$ à celui de la fraction

rationnelle $x \to R(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}, \frac{2t}{1-t^2})$.

Exemple

Calcule $\int \frac{1}{\sin x} dx$

En posant $t=\tan(\frac{x}{2})$

Alors, $\int \frac{1}{\sin x} dx=\int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}} \frac{2\,dt}{1+t^2}=\frac{dt}{t}=\ln|t|+c=\ln|\tan(\frac{x}{2})|+c$.

Calcul d'intégrales de la forme P(cos x, sin x)

Où P désigne un polynome à deux variables.

On cherche à calculer des primitives de fonctions qui sont des sommes de termes de la forme $\sin^p x . \cos^q x$, *où* p *et* q sont deux entiers naturels.

-Si p est impair, le changement de variable $u=\cos x$, $du=-\sin x\, dx$ conduit à une primitive de fonction polynomiale.

- Si q est impair, on pose $u=\sin x$, $du=\cos x$
- Si p et q sont impair, on pose $u=\cos 2x$
- Si p et q sont pairs, on pose $u=\tan x$.

Exemple

$$I = \int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx$$

Possons : $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x$, d'où

$$I = \int \frac{1-t^2}{t^4} dt = \frac{-1}{3t^3} + \frac{1}{t} + c, c \in \mathbb{R}.$$

Donc

$$I = \frac{-1}{3\sin^3 x} + \frac{1}{\sin x} + c, c \in \mathbb{R}.$$

Intégrale de la forme: cos(αx).sin(βx)

L'intégrale qui est un produit de deux fonctions trignométriques peut etre transformé en une somme de fonctions trigonométriques à l'aide de l'une des formules suivantes:

$$\sin(\alpha x)\cos(\beta x) = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)x + \sin(\alpha-\beta)x\right]$$

$$\sin(\alpha x)\sin(\beta x) = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)x - \cos(\alpha-\beta)x\right]$$

$$\cos(\alpha x)\cos(\beta x) = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)x + \cos(\alpha-\beta)x\right].$$

Exemple

Déterminer $\int \cos(2x)\sin(3x)dx$

On a $\cos(2x)\sin(3x)=\frac{1}{2}[\sin(5x)+\sin(x)]$

Alors, $\int \cos(2x)\sin(3x)dx=\frac{1}{10}\cos(5x)+\frac{1}{2}\cos(x)+c$.

4. Exercices

4.1. Exercice

Exercice

Une primitive de la fonction f définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par $f(x) = \ln x$ est

- O $x \to \ln x + x$
- O $x \to x \ln x - x$
- O $x \to x \ln x$

Exercice

La primitive de la fonction g est définie par $g(x) = \int \frac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$ est

- O $\frac{1}{3} \arcsin^3 x$
- O $4 \arcsin^4 x$
- O $\frac{1}{4} \arcsin^4 x$

Exercice

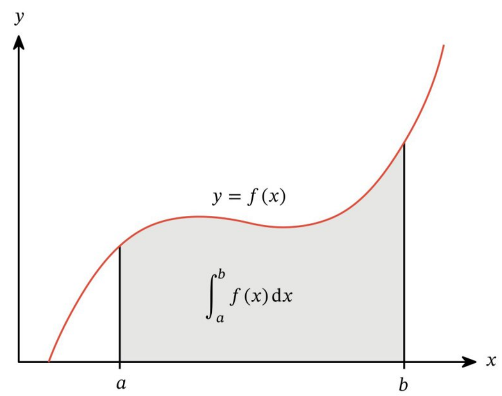
La primitive de la fonction h définie par $h(x) = \int \frac{1}{x^2 + 2x + 5}$ est

- O $\arctan(\frac{x+1}{2})$
- O $\frac{1}{2} \arctan(\frac{x+1}{2})$
- O $\frac{1}{2} \arctan(x+1)$

Chapitre 02 : Intégrale définie

II

Dans cette partie nous allons nous intéresser l'intégration des fonctions définies et bornées dans un intervalle fermé $[a, b]$ de $\mathbb{R}$.



Représentation géométrique de l'intégrale de f sur [a, b]

1. L'intégrale d'une fonction en escalier

Définition

on appelle subdivision de l'intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, un ensemble finis des points $x_0, x_1, \ldots\ldots, x_n$, tel que

$a = x_0 < x_1 < \ldots . < x_n = b$.

On remarque que $x_i - x_{i-1} > 0, \forall i = 1,2, \ldots, n$

on appelle pas de la subdivision, le réel $max_{\overline{i=1,n}}(x_i, x_{i-1})$.

Définition

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

On dit que f est une fonction en escalier s'il existe une subdivision $\{x_0, x_1, \ldots\ldots, x_n\} de [a, b]$ telle que f soit constante sur chaque intervalle $]x_i, x_{i-1}[$.

c'est a dire $f(x) = C_i, \ pour\ tout\ x \in]x_i, x_{i-1}[$.

Définition

On appelle intégrale d'une fonction f en escalier sur $[a,b]$, le nombre

$$I(f)=\sum_{i=1}^{n} C_i(x_i-x_{i-1})=C_1(x_1-x_0)+C_2(x_2-x_1)+...+C_n(x_n-x_{n-1})$$

On note ce nombre par $\int_a^b f(x)dx$.

Remarque

Le nombre $I(f)$ ne dépend pas de la subdivision choisie.

Exemple

Soit $f\ :[0,1]\to\mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases} 0 & si\ x=0 \\ \frac{1}{2} & si\ 0<x<\frac{1}{2} \\ 3 & si\ x=\frac{1}{2} \\ 1 & si\ \frac{1}{2}<x\leq 1 \end{cases}$$

Alors

$$I(f)=\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-0)+1(1-\frac{1}{2})=\frac{3}{4}.$$

2. Intégration d'une fonction bornée

Définition

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction bornée et on définit une subdivision $a=x_0<x_1<....<x_n=b.$ avec $h=\frac{b-a}{n}$ le pas c'est a dire

$x_0=a$

$x_i=x_{i-1}+h$

$x_n=a+nh$.

On considère les fonctions en escalier suivants $\varphi_n:[a,b]\to\mathbb{R}$.

Définition

On appelle somme de Darboux inférieur I_n , l'intervalle de la fonction en escalier φ_n

$$I_n=\int_a^b \varphi_n(x)dx=\sum_{i=1}^{n} C_i(x_i-x_{i-1})\inf_{t\in]x_{i-1},x_i[} f(t).$$

On appelle somme de Darboux supérieur J_n , l'intervalle de la fonction en escalier $\Psi_n(x)$

$$J_n = \int_a^b \Psi_n(x)dx = \sum_{i=1}^{n} C_i(x_i - x_{i-1}) \sup_{t\in]x_{i-1},x_i[} f(t).$$

Fondamental

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue, alors les suites $I_n et J_n$ de terme général $I_n=\int_a^b \varphi_n(t)dt$ et $J_n=\int_a^b \psi_n(t)dt$ sont convergentes et convergent vers la meme limite lorsque $n\to+\infty$ et on définit $\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to+\infty} I_n=\lim_{n\to+\infty} J_n$.

Remarque

On peut généralisé le résultat précédent pour les fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$ et les fonction monotone.

Définition : Sommes de Riemman

On appelle somme de Riemann d'une fonction f définie sur $[a,b]$, le réel $S_n=\frac{b-a}{n}(f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n))$ donc

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})f(x_i)=\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a+i(\frac{b-a}{n})).$$

Remarque

Si $[a,b]=[0,1], alors\, S_n=\sum_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n})$.

Définition

On dit que f est intégrable (au sens de Riemann) si $\lim_{n\to+\infty} I_n=\lim_{n\to+\infty} J_n$, c'est a dire la somme de darboux inférieur égale a la somme de darboux supérieur. Dans ce cas le nombre de $\int_a^b f(x)dx$ est dit intégrale de Riemann.

Remarque

Si f est intégrable au sens de Riemann alors on a $\lim_{n\to+\infty} S_n=\int_a^b f(x)dx$.

Exemple

Soit $f\ :[0,1]\to\mathbb{R}$

$x\to f(x)=x.$

Soit la subdivision suivante

$\{x_i = \frac{i}{n}, i = 1, 2, ..., n\}$ c'est à dire : $x_i - x_{i-1} = \frac{1}{n}$.

Alors :

$$m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i] |f(x)|} = \frac{i-1}{n}$$

et

$$M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i] |f(x)|} = \frac{i}{n}$$

Ainsi :

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = \frac{n(n-1)}{2n^2}$$

$$J_n = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = \frac{n(n+1)}{2n^2}$$

on remarque que $\lim_{n \to +\infty} I_n = \lim_{n \to +\infty} J_n = \frac{1}{2}$ et

3. Calcule de l'intégrale définie

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et soit $x \in [a, b]$ *posons* $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.

Fondamental

La fonction $F : [a, b] \to \mathbb{R}, x \to F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est dérivable sur $[a, b]$ et $F'(x) = f(x)$ c'est à dire : F une primitive de f

le réel $\int_a^b f(x)\,dx$ est dit intégrale définie sur f et on a :

$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Exemple

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$ par ne intégration par parties

on a : $u(x) = x \Rightarrow u'(x) = 1, v'(x) = \sin(x) \Rightarrow v(x) = -\cos(x)$

Ainsi

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(x) dx = [-x \cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) dx = 1.$$

Fondamental : Relation de Chasles

Soit f une fonction continue sur intervalle $[a,b]$ et $c\in[a,b]$

Alors $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$.

Complément : Démonstration

Si F une primitive de f sur $[a,b]$, alors

$$\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=F(b)-F(c)+F(c)-F(b)=\int_a^b f(x)dx\ .$$

Fondamental : Linéarité de l'intégrale

soit f *et* g deux fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$ et k un réel quelconque

- $\int_a^b f(x)+g(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$
- $\int_a^b k\,f(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$.

Fondamental : Propriété de positivité

Soit f une fonction continue positive sur un intervalle $[a,b]$ alors $\int_a^b f(x)dx\geqslant 0$.

Complément : Démonstration

Soit F une primitive de f .

La fonction F est croissante car sa dérivée est positive . F conserve donc les inégalités. Puisque $b\geqslant a\,,\,F(b)\geqslant F(a)\,donc\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)\geqslant 0$.

Fondamental : L'intégrale conserve les inégalités des fonctions

Soient f *et* g deux continues sur un intervalle $[a,b]$.

Si pour tout $x\in[a,b],\,f(x)\leqslant g(x),\,alors\int_a^b f(x)dx\leqslant\int_a^b g(x)dx$.

Fondamental : Inégalité de Cauchy-Schwartz

Si f et g sont deux fonctions intégrables sur $[a,b]$, alors on a :

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b |g(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

4. Exercices

4.1. Exercice

Exercice

L'intégrale définie de la fonction f

$$f(x) = \begin{cases} -1 & si\ x = 0 \\ +1 & si\ 0 < x < 1 \\ +3 & si\ x = 1 \\ -2 & si\ 1 < x \leq 2 \\ +4 & si\ 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

définie sur $[0, 4]$ est

- 8
- 4
- 7

Exercice

Les sommes de Darboux inférieures et supérieures associées à $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ de la subdivision $d = \{-3, -2, 0, 1, 4\}$ sur l'intervalle $[-3, 4]$ sont :

- $s(f, d) = \dfrac{20}{17}, S(f, d) = \dfrac{47}{10}$
- $s(f, d) = \dfrac{20}{17}, S(f, d) = \dfrac{20}{17}$
- $s(f, d) = \dfrac{20}{17}, S(f, d) = \dfrac{10}{17}$

Exercice

L'intégrale $\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x}{(e^x+1)^2} dx$ est égale à

- $-\dfrac{1}{12}$
- $\ln \dfrac{4}{3}$
- $\dfrac{1}{12}$

Bibliographie

livre Analyse mathématique II :Précis de cours 130 exercices gradués et corrigés Louis Jérémy, Pierre Mineau, Jean-Claude Thiénard.

Webographie

https://www.univ-bouira.dz/fr/wp-content/uploads/2018/12/01-Brochure-danalyse-I-version-enti%C3%A8re-pour-forum.pdf