Fiche de TD 4

Solution de L'exercice 1:
1) $\cos(2x) = \frac{1}{2} \Longrightarrow 2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $2x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \Longrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{6} + k\pi$.
En total on a quatre solutions $\frac{\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$ et $\frac{11\pi}{6}$.

2) Comme $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ l'équation $2\cos^2 x + 7\sin x = 5$ peut s'écrire comme $2\sin^2 x - 7\sin x + 3 = 0$ qui est une équation du second degré.

3) En factorisant l'équation $(2\sin x - 1)(\sin x - 3) = 0$ alors $\sin x = 0.5$ et les solutions sont $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$.

Solution de L'exercice 2:
a) On sait que

$$\arcsin(\sin x) = x$$

si et seulement si x appartient à l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$. On cherche donc un x dans cet intervalle, tel que

$$\sin x = \sin \frac{18\pi}{5}.$$

Or

$$\frac{18\pi}{5} = \frac{20\pi - 2\pi}{5} = 4\pi - \frac{2\pi}{5}.$$

Comme $-\frac{2\pi}{5}$ appartient à $[-\pi/2, \pi/2]$, on aura donc

$$\arcsin\left(\sin \frac{18\pi}{5}\right) = -\frac{2\pi}{5}.$$

b) On peut utiliser la formule

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

On a alors

$$\arccos\left(\sin \frac{18\pi}{5}\right) = \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\sin \frac{18\pi}{5}\right)$$

et d'après a)

$$\arccos\left(\sin \frac{18\pi}{5}\right) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{9\pi}{10}.$$

On constate bien que ce résultat appartient à l'intervalle $[0, \pi]$.

c) On procède comme dans a)

$$\frac{15\pi}{7} = \frac{14\pi + \pi}{7} = 2\pi + \frac{\pi}{7},$$

donc

$$\arcsin\left(\sin\frac{15\pi}{7}\right) = \frac{\pi}{7}.$$

d) Le nombre $\frac{1}{3}$ étant compris entre -1 et 1, on a

$$\sin\left(\arcsin\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

e) le nombre $\frac{\pi}{2}$ étant réel, on a

$$\tan\left(\arctan\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Solution de L'exercice 3:

a) $\forall\, x \in [-1,1]\ \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$
$\forall\, x \in [-1,1]\ \sin^2(\arccos x) = 1 - \cos^2(\arccos x) = 1 - x^2$ donc $\sin(\arccos x) = \pm\sqrt{1-x^2}$.
Mais comme $\arccos(x) \in [0,\pi]$ alors $\sin(\arccos x) \geq 0$ donc $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$.

b)$\forall\, x \in [-1,1]\ \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$
$\forall\, x \in [-1,1]\ \cos^2(\arcsin x) = 1 - \sin^2(\arcsin x) = 1 - x^2$ donc $\cos(\arcsin x) = \pm\sqrt{1-x^2}$.
Mais comme $\arcsin(x) \in [-\pi/2, \pi/2]$ alors $\cos(\arcsin x) \geq 0$ donc $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$.

c) $\forall\, x \in [-1,1]$ on a : $0 \leq \arccos x \leq \pi$ donc $-\pi \leq -\arccos x \leq 0$ alors $0 \leq \pi - \arccos x \leq \pi$.
Rappelons que $\cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta)$ donc $\cos(\pi - \arccos x) = -\cos(\arccos x) = -x$.
Il résulte que $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$ autrement $\arccos x + \arccos(-x) = \pi$.
Rappel :

$$\boxed{\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ et } \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall\, x \in\,]-1,1[.}$$

d) Soit f la fonction définie sur $[-1,1]$ par $f(x) = \arcsin x + \arccos x$ alors $f'(x) = 0$ pour $x \in]-1,1[$ donc f est une fonction constante sur $[-1,1]$ Or $f(0) = \frac{\pi}{2}$ donc pour tout $x \in [-1,1]$, $f(x) = \frac{\pi}{2}$.

Rappel :

$$\boxed{\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta \text{ et } \sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta}$$

3) Soit $g(x) = \arctan x + \arctan\dfrac{1}{x}$, la fonction est définie sur $\mathbb{R}^*$.

On a $g'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{-\frac{1}{x^2}}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = 0$ donc g est constante sur chacun des ses intervalle de définition.

$g(x) = c_1$ sur $]-\infty, 0[$ et $g(x) = c_2$ sur $]0, +\infty[$. En calculant $g(1)$ et $g(-1)$ on obtient $c_1 = -\dfrac{\pi}{2}$ et $c_2 = +\dfrac{\pi}{2}$.

$$\boxed{g(x) = g(1) = \frac{\pi}{2},\ \forall\, x > 0 \text{ et } g(x) = g(-1) = -\frac{\pi}{2},\ \forall\, x < 0.}$$

Solution de L'exercice 4:

a) $\arcsin x = \arcsin\dfrac{4}{5} + \arcsin\dfrac{5}{13}$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \sin(\arcsin x) = \sin\left(\arcsin\frac{4}{5} + \arcsin\frac{5}{13}\right)\\
&\Longrightarrow x = \sin\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)\cdot\cos\left(\arcsin\frac{5}{13}\right) + \cos\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)\cdot\sin\left(\arcsin\frac{5}{13}\right)\\
&\Longrightarrow x = \frac{4}{5}\times\sqrt{1-\sin^2\left(\arcsin\frac{5}{13}\right)} + \frac{15}{3}\times\sqrt{1-\sin^2\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)}\\
&\Longrightarrow x = \frac{4}{5}\times\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2} + \frac{15}{3}\times\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}\\
&\Longrightarrow x = \frac{4}{5}\times\frac{12}{13} + \frac{5}{13}\times\frac{3}{5} = \frac{48}{65} + \frac{3}{13} = \frac{63}{65} \in [-1, 1]
\end{aligned}$$

b) L'équation $(\arcsin x - 5)\arcsin x = -4$,
équivaut au système

$$\begin{cases} U = \arcsin x \\ \\ U^2 - 5U + 4 = 0 \end{cases}$$

L'équation du second degré a deux racines $U_1 = 1$ et $U_2 = 4$. Mais $\arcsin x$ étant compris entre $-\pi/2$ et $\pi/2$, l'équation $\arcsin x = 4$ n'a pas de solution. Par contre l'équation $\arcsin x = 1$ a une solution $x = \sin 1$, qui est la seule solution de l'équation initiale.

c) $5\cosh x - 4\sinh x = 3$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow 5\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) - 4\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = 3 \\ &\Longrightarrow \frac{5}{2}e^x + \frac{5}{2}e^{-x} - 2e^x + 2e^{-x} = 3 \\ &\Longrightarrow \frac{1}{2}e^x + \frac{9}{2}e^{-x} = 3 \Longrightarrow e^x + 9e^{-x} = 6 \\ &\Longrightarrow e^{2x} + 9 = 6e^x \Longrightarrow e^{2x} - 6e^x + 9 = 0.....(*) \end{aligned}$$

Posons $t = e^x$, $(*)$ devient : $t^2 - 6t + 9 = 0$.
$\triangle = 0$, $t = 3 \Longrightarrow x = \ln(3)$.
Calculons les limites

a) En écrivant la fonction à l'aide des exponentielles, on obtient

$$2\cosh^2 x - \sinh 2x = 2\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = 1 + e^{-2x},$$

et ceci tend vers 1 lorsque x tend vers $+\infty$.

b) Alors

$$e^{2x}\left(2\cosh^2 x - \sinh 2x\right) = e^{2x} + 1,$$

et ceci tend vers 1 lorsque x tend vers $-\infty$.
$\star$ La fonction f est définie si

$$\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) \geq 1$$

Cette inéquation s'écrit

$$x + \frac{1}{x} \geq 2,$$

ou encore

$$\frac{(x-1)^2}{x} \geq 0.$$

Le domaine de définition est donc $]0, +\infty[$. En utilisant l'expression de argch sous forme de logarithme,

$$\begin{aligned}
\operatorname{argch}\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right] &= \ln\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)+\sqrt{\frac{1}{4}\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-1}\right] \\
&= \ln\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)+\sqrt{\frac{1}{4}\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}\right] \\
&= \ln\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{2}\left|x-\frac{1}{x}\right|\right].
\end{aligned}$$

Si $x \geq 1$, le nombre $x - \dfrac{1}{x}$ est positif ainsi que $\ln x$, et

$$\operatorname{argch}\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right] = \ln x = |\ln x|.$$

Si $0 < x \leq 1$, le nombre $x - \dfrac{1}{x}$ est négatif ainsi que $\ln x$, et

$$\operatorname{argch}\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right] = \ln\frac{1}{x} = -\ln x = |\ln x|,$$

donc, pour tout $x > 0$

$$\operatorname{argch}\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right] = |\ln x|.$$