Chapitre V

Développement limité

1 FORMULES DE TAYLOR

1.1 Formule de Taylor avec reste de Lagrange

La formule de Taylor avec reste de Lagrange est donnée par le théorème suivant :

Théorème 1.1 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}, n$ fois dérivable dans $[a,b]$ et dont la dérivée d'ordre n qu'on note $f^{(n)}$ vérifie les conditions a) et b) suivantes:*
a) $f^{(n)}$ est continue dans $[a,b]$
b) $f^{(n)}$ est dérivable dans $]a,b\Big[\Big(f^{(n+1)}$ existe dans $]a,b[)$. Alors il existe $\xi \in]a,b[$ tel que:

$$f(b) = f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(b-a)+\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2+\frac{f^{(3)}(a)}{3!}(b-a)^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} \qquad (1)$$

Preuve 1.1 *On démontre ce théorème en appliquant le théorème de Rolle à la fonction $H(x)$ suivante :*

$$H(x) = f(b)-f(x)-\frac{f'(x)}{1!}(b-x)-\frac{f''(x)}{2!}(b-x)^2-\frac{f^{(3)}(x)}{3!}(b-x)^3-\ldots-\frac{f^{(n)}(x)}{n!}(b-x)^n-(b-x)^{n+1}\cdot A \qquad (2)$$

Le terme A est à determiner de sorte que la fonction H vérifie les conditions du théorème de Rolle. Remarquons d'abord que $H(b) = 0$ car

$$H(b) = f(b)-f(b)-\frac{f'(b)}{1!}(b-b)-\frac{f''(b)}{2!}(b-b)^2-\frac{f^{(3)}(b)}{3!}(b-b)^3-\ldots-\frac{f^{(n)}(b)}{n!}(b-b)^n-(b-b)^{n+1}\cdot A = 0$$

Trouvons maintenant A de sorte que la deuxième condition du théorème de Rolle $H(a) = 0$, soit réalisée.

$$H(a) = f(b)-f(a)-\frac{f'(a)}{1!}(b-a)-\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2-\frac{f^{(3)}(a)}{3!}(b-a)^3-\ldots-\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n-(b-a)^{n+1}\cdot A = 0 \quad (3)$$

implique :

$$A = \frac{f(b)-f(a)-\frac{f'(a)}{1!}(b-a)-\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2-\frac{f^{(3)}(a)}{3!}(b-a)^3-\ldots-\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n}{(b-a)^{n+1}}. \quad (4)$$

Bien sur avec A vérifiant la relation (4), on

$$H(a) = H(b) = 0.$$

Les conditions a) et b) du théorème1 impliquent que : a') H est continue dans $[a,b]$ b') H est dérivable dans $]a,b[$ D'après le théorème de Rolle, il existe $\xi \in]a,b[$ tel que $H'(\xi) = 0$. D'après (2)

$$\begin{aligned} H'(x) =&[-f'(x)+f'(x)] + \left[-\frac{f''(x)}{1!}(b-x)+\frac{2}{2!}f''(x)(b-x)\right] + \\ &\left[-\frac{f^{(3)}(x)}{2!}(b-x)^2+\frac{3}{3!}f^{(3)}(x)(b-x)^2\right] + \\ &+\left[-\frac{f^{(4)}(x)}{3!}(b-x)^3+\frac{4}{4!}f^{(4)}(x)(b-x)^3\right] + \ldots \\ &+\left[-\frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1}+\frac{n}{n!}f^{(n)}(x)(b-x)^{n-1}\right] \\ &-\frac{f^{(n+1)}(x)}{(n)!}(b-x)^n+(n+1)(b-x)^nA. \end{aligned} \quad (6)$$

En remarquant que $\frac{p}{p!} = \frac{1}{(p-1)!}$, les termes entre crochets de la relation (6) sont toutes nulles et $H'(x)$ devient :

$$H'(x) = -\frac{f^{(n+1)}(x)}{(n)!}(b-x)^n + (n+1)(b-x)^nA$$

et

$$H'(\xi) = 0 \Longleftrightarrow (n+1)(b-\xi)^nA = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n)!}(b-\xi)^n$$

d'où

$$A = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

soit en remplaçant A par sa valeur dans (4), on obtient:

$$\frac{f(b) - f(a) - \frac{f'(a)}{1!}(b-a) - \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 - \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(b-a)^3 - \ldots - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n}{(b-a)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

ou encore :

$$f(b) = f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(b-a)+\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2+\frac{f^{(3)}(a)}{3!}(b-a)^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

Théorème 1.2 *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}, n$ fois dérivable dans $[a, b]$ et dont la dérivée d'ordre n qu'on note $f^{(n)}$ vérifie les conditions a) et b) suivantes:*
a) $f^{(n)}$ est continue dans $[a, b]$
b) $f^{(n)}$ est dérivable dans $]a, b\left[\left(f^{(n+1)}\right.\right.$ existe dans $]a, b[)$. Considérons x_0 et $x \in]a, b[$ quelconques tels que : $x_0 < x$. Alors il existe $\xi \in]x_0, x[$ tel que:

$$\begin{aligned} f(x) =& f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + ... \\ &+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \end{aligned} \tag{7}$$

Preuve 1.2 *C'est une application directe du théorème1. En effet:*

$$\begin{cases} x_0, x \in]a, b[\\ f^{(n)} \text{ est continue dans } [a, b] \\ f^{(n)} \text{ est dérivable dans } \left]a, b\right[\end{cases}$$

alors

$$\begin{cases} f^{(n)} \text{ est continue dans } [x_0, x] \\ f^{(n)} \text{ est dérivable dans } \left]x_0, x\right[. \end{cases}$$

D'après le théorème1, il existe $\xi \in]x_0, x[$ tel que :

$$\begin{aligned} f(x) =& f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \ldots \\ &+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \end{aligned}$$

Remarque 1.1 *Grace à la formule (7), on pourra écrire $f(x)$ pour x assez proche de x_0 sous la forme suivante:*

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

avec :

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

et

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

qui vérifie bien sur:

$$\lim_{x \to x_0} R_n(x) = 0.$$

En d'autres termes, on pourra approximer $f(x)$ par $P_n(x)$ pour x assez proche de x_0.
$f(x) \approx P_n(x)$ *: pour x asse z proche de x_0*

1.2 Formule de Taylor MacLaurin

Si $x_0 = 0$, la formule de Taylor (7) s'appelle formule de Taylor Mac Lauren avec reste de Lagrange et prend alors la forme suivante :

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad \xi \in]0, x[$$

1.3 Formule de Taylor Young

Nous allons restreindre les hypothèses en supposant uniquement que $f^{(n)}(x_0)$ existe.

Théorème 1.3 *Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in [a, b]$. Supposons que $f^{(n)}(x_0)$ existe (finie), alors $\forall x \in V(x_0)$*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{1!}f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!}f^{(2)}(x_0) + \ldots + \frac{(x - x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + o(x - x_0)^n \qquad (8)$$

où $o(x - x_0)^n = (x - x_0)^n \epsilon(x)$ avec $\lim_{x \to x_0} \epsilon(x) = 0$.

Remarque 1.2 $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} = (x - x_0)^n \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0) = (x - x_0)^n \epsilon(x)$ *avec* $\epsilon(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)$.

On note

$$o\left((x-x_0)^n\right) = (x-x_0)^n\,\epsilon(x) \;\; avec \;\; \lim_{x\to x_0}\epsilon(x)=0$$

o se lit petit o.
c'est à dire :

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=0$$

Remarque 1.3 *Si $x_0=0$, la formule (8) s'appelle formule de Taylor Young- Maclaurin et prend la forme suivante:*

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x), \tag{9}$$
$$avec \;:\; \lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$$

2 DL des fonctions usuelles à lorigine

Les DL suivants en 0 proviennent de la formule de Taylor-Young

$$\exp x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n\epsilon(x)$$
$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\epsilon(x)$$
$$\operatorname{sh} x = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2}\epsilon(x)$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\epsilon(x)$$
$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2}\epsilon(x)$$
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^n\epsilon(x)$$
$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n\epsilon(x)$$
$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + x^n\epsilon(x)$$
$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^n\epsilon(x)$$
$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2^n n!}x^n + x^n\epsilon(x)$$

3 Développements limités au voisinage dun point

Nous avons vu que dans un voisinage de x_0 on peut approcher $f(x)$ par un polynôme P_n de degré n de sorte que $f(x) - P_n(x) = o\,(x - x_0)^n$. Ceci lorsque $f^{(n)}(x)$ existe. Maintenant, nous allons voir qu'un tel polynôme peut exister même si $f^{(n)}$ n'existe pas et même si f n'est pas continue en x_0.

3.1 D.L. au voisinage de zéro

Soit I un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction quelconque.

Définition 3.1 *Soit f une fonction définie au voisinage de zéro. On dit que f admet un D.L. d'ordre n au voisinage de 0 s'il existe un ouvert I de centre 0 et des constantes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tels que $\forall x \in I, x \neq 0$*

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + x^n \epsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \to 0} \epsilon(x) = 0 \\ &= \underbrace{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n}_{P_n(x)} + o\,(x^n)\,. \end{aligned}$$

1) $P_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ est la partie régulière du D.L.
2) $o\,(x^n) = x^n \epsilon(x)$ (avec $\lim_{x \to 0} \epsilon(x) = 0$) est le reste.

Exemple 3.1 $f(x) = 1 + \frac{5}{2}x + 3x^2 + x^3 \sin \frac{1}{x}, x \in \mathbb{R}^*$ *est un $DL_2(0)$.*

Remarque 3.1 *1) Si f admet un $DL_n(0)$ alors $\lim_{x \to 0} f(x)$ existe. En effet, $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + x^n \epsilon(x)$, d'où $\lim_{x \to 0} f(x) = a_0$ Cela ne veut pas dire que f est continue en 0 car $f(0)$ peut ne pas exister. Exemple : $f(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0$ n'admet pas D.L. au voisinage de 0 car $\lim_{x \to 0} f(x) = \infty$.*
2) Si f admet un $DL_n(0)$ et $a_0 = f(0)$, alors f est dérivable en 0 . En effet, $\forall x \neq 0, f(x) = f(0) + a_1 x + \ldots + a_n x^n + x^n \epsilon(x)$ avec $\lim_{x \to 0} \epsilon(x) = 0$. $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = a_1 + a_2 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + x^{n-1} \epsilon(x)$ avec $\lim_{x \to 0} \epsilon(x) = 0.$ Donc $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = a_1 = f'(0)$

3.2 Propriétés des D.L.

Proposition 3.1 *(Unicité) Si admet un $DL_n(0)$ alors ce D.L. est unique*

Preuve 3.1 *Supposons que f admet deux $DL_n(0)$, c'est à dire*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + x^n \epsilon_1(x) \text{ avec } \lim_{x \to 0} \epsilon_1(x) = 0$$

et

$$f(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n + x^n \epsilon_2(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0} \epsilon_2(x) = 0.$$

Ce qui donne

$$(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)\,x + \ldots + (a_n - b_n)\,x^n = x^n\left[\epsilon_2(x) - \epsilon_1(x)\right].$$

En passant à la limite lorsque $x \to 0$, *on aura* $a_0 = b_0$, *d'où*

$$(a_1 - b_1)\,x + \ldots + (a_n - b_n)\,x^n = x^n\left[\epsilon_2(x) - \epsilon_1(x)\right].$$

Si $x \neq 0$, *on obtient*

$$(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2)\,x + \ldots + (a_n - b_n)\,x^{n-1} = x^{n-1}\left[\epsilon_2(x) - \epsilon_1(x)\right].$$

En passant à la limite lorsque $x \to 0$, *on aura* $a_1 = b_1$. *De cette manière, on aura* $a_n = b_n, \forall n$. *D'où l'unicité du D.L.*

Théorème 3.1 6.3 *Si* $f^{(n)}(0)$ *existe, alors le D.L. de* f *est*

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f^{(2)}(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + x^n\epsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0}\epsilon(x) = 0.$$

Si $f^{(n)}(0)$ existe, et f admet un D.L. d'ordre n au voisinage de 0, alors

$$a_0 = f(0), a_1 = \frac{f'(0)}{1!}, a_2 = \frac{f^{(2)}(0)}{2!}, \ldots, \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Preuve 3.2 *C'est grâce à l'unicité du D.L.*

Exemple 3.2 *(D.L. obtenu par division suivant les puissance croissante)*

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1-x} \\ &= 1 + x + x^2 + \ldots + x^n\epsilon(x) \end{aligned}$$

avec $\epsilon(x) = \frac{x}{1-x} \to 0$ *lorsque* $x \to 0$ *On peut déduire* $f^{(n)}(0)$, *en effet*

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f^{(2)}(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + x^n\epsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0}\epsilon(x) = 0.$$

et par identification, on a $\forall k : 0 \leq k \leq n$, $\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = 1$.

Remarque 3.2 *L'existence d'un D.L. n'implique pas l'existence des dérivées. En effet, soit*

$$g(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + x^{n+1} \sin \frac{1}{x}$$

Il est clair que g admet un $DL_n(0)$ mais elle n'est pas dérivable en 0 puisqu'elle n'est pas définie en 0.

3.3 Opérations sur les D.L.

La formule de Mac-Laurin Young nous a servi à établir certain nombre de D.L. de fonctions clasiques. Bien qu'en général, cette formule permette d'obtenir nombre de D.L., il peut s'avérer cependant que le calcul des dérivées ne soit pas aisé. Ainsi, le calcul des D.L. est souvent facilité en appliquant les régles suivantes

3.3.1 D.L. obtenu par restriction

Si f admet un D.L. d'ordre n au voisinage de 0 , alors $\forall k \leq n, f$ admet un D.L. d'ordre k. En effet, on a

$$\begin{aligned} f(x) =& a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + x^n \epsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \to 0} \epsilon(x) = 0 \\ =& a_0 + a_1 x + \ldots + a_k x^k + a_{k+1} x^{k+1} + a_{k+2} x^{k+2} + \ldots \\ & + a_n x^n + x^n \epsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \to 0} \epsilon(x) = 0 \\ =& a_0 + a_1 x + \ldots + a_k x^k \\ & + x^k \left[a_{k+1} x + a_{k+2} x^2 + \ldots + a_n x^{n-k} + x^{n-k} \epsilon(x) \right] \end{aligned}$$

avec $\epsilon_2(x) = \left[a_{k+1} x + a_{k+2} x^2 + \ldots + a_n x^{n-k} + x^{n-k} \epsilon(x) \right] \to 0$ lorsque $x \to 0$.

3.3.2 Somme et produit

On suppose que f et g sont deux fonctions qui admettent des DL en 0 à l'ordre n :

$$f(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n + x^n \epsilon_1(x) \quad g(x) = d_0 + d_1 x + \cdots + d_n x^n + x^n \epsilon_2(x)$$

Proposition 3.2 *-$f+g$ admet un DL en 0 l'ordre n qui est :*

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=(c_0+d_0)+(c_1+d_1)\,x+\cdots+(c_n+d_n)\,x^n+x^n\in(x).$$

$f\times g$ admet un DL en 0 l'ordre n qui est : $(f\times g)(x)=f(x)\times g(x)=T_n(x)+x^n\in(x)$ où $T_n(x)$ est le polynôme $(c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n)\times(d_0+d_1x+\cdots+d_nx^n)$ tronqué à l'ordre n. Tronquer un polynôme à l'ordre n signifie que l'on conserve seulement les monômes de degré $\leqslant n$.

Exemple 3.3 *Calculer le DL de $\cos x\times\sqrt{1+x}$ en 0 à l'ordre 2 . On sait que $\cos x=1-\frac{1}{2}x^2+x^2\epsilon_1(x)$ et $\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+x^2\epsilon_2(x)$. Donc:*

$$\cos x\times\sqrt{1+x}=\left(1-\frac{1}{2}x^2+x^2\epsilon_1(x)\right)\times\left(1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+x^2\epsilon_2(x)\right)$$

$$\begin{aligned}
&=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+x^2\epsilon_2(x) \quad \textit{on développe}\\
&\quad-\frac{1}{2}x^2\left(1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+x^2\epsilon_2(x)\right)\\
&\quad+x^2\epsilon_1(x)\left(1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+x^2\epsilon_2(x)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+x^2\epsilon_2(x) \quad \textit{on développe encore}\\
&\quad-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{16}x^4-\frac{1}{2}x^4\epsilon_2(x)\\
&\quad+x^2\epsilon_1(x)+\frac{1}{2}x^3\epsilon_1(x)-\frac{1}{8}x^4\epsilon_1(x)+x^4\epsilon_1(x)\epsilon_2(x)
\end{aligned}$$

$$=\underbrace{1+\frac{1}{2}x+\left(-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{2}x^2\right)}_{\textit{partie tronquée à l'ordre 2}} \ \textit{termes de degré 0 et 1,2}$$

$$+\underbrace{\begin{array}{r}x^2\epsilon_2(x)-\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{16}x^4-\frac{1}{2}x^4\epsilon_2(x)+x^2\epsilon_1(x)\\ +\frac{1}{2}x^3\epsilon_1(x)-\frac{1}{8}x^4\epsilon_1(x)+x^4\epsilon_1(x)\epsilon_2(x)\end{array}}_{\textit{reste de la forme } x^2e(x)}$$

$$=1+\frac{1}{2}x-\frac{5}{8}x^2+x^2e(x)$$

3.3.3 Composition

On écrit encore :

$$f(x) = C(x) + x^n\epsilon_1(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n + x^n\epsilon_1(x)$$
$$g(x) = D(x) + x^n\epsilon_2(x) = d_0 + d_1x + \cdots + d_nx^n + x^n\epsilon_2(x)$$

Proposition 3.3 *Si $g(0) = 0$ (c'est-à-dire $d_0 = 0$) alors la fonction $f \circ g$ admet un DL en 0 à l'ordre n dont la partie polynomiale est le polynôme tronqué à l'ordre n de la composition $C(D(x))$.*

Exemple 3.4 *Calcul du DL de $h(x) = e^{\sin x}$ en 0 à lordre 3 .*
Posons $f(u) = e^u$ et $g(x) = \sin x$. On a $g(0) = \sin 0 = 0$,

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3!} + o\left(u^3\right),$$
$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)$$

et donc

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) =& e^{\sin x}\\ =&1 + \left(x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)\right)^2\\ &+ \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)\right)^3\\ =&1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o\left(x^3\right)\end{aligned}$$

3.3.4 Division

Voici comment calculer le DL d'un quotient f/g. Soient

$$f(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n + x^n\epsilon_1(x) \quad g(x) = d_0 + d_1x + \cdots + d_nx^n + x^n\epsilon_2(x)$$

Nous allons utiliser le DL de $\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + \cdots$.
1. Si $d_0 = 1$ on pose $u = d_1x + \cdots + d_nx^n + x^n\epsilon_2(x)$ et le quotient s'écrit $f/g = f \times \frac{1}{1+u}$.
2. Si d_0 est quelconque avec $d_0 \neq 0$ alors on se ramène au cas précédent en écrivant

$$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{d_0}\frac{1}{1 + \frac{d_1}{d_0}x + \cdots + \frac{d_n}{d_0}x^n + \frac{x^n\epsilon_2(x)}{d_0}}.$$

3. Si $d_0 = 0$ alors on factorise par x^k (pour un certain k) afin de se ramener aux cas précédents.

Exemple 3.5 ***1.*** *DL de* $\tan x$ *en 0 à l'ordre 5 .*
Tout d'abord $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^5\epsilon(x)$.
D'autre part $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^5\epsilon(x) = 1 + u$ *en posant* $u = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^5\epsilon(x)$*. Nous aurons besoin de* u^2 *et* u^3 : $u^2 = \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^5\epsilon(x)\right)^2 = \frac{x^4}{4} + x^5\epsilon(x)$ *et en fait* $u^3 = x^5\epsilon(x)$*. (On note abusivement* $\epsilon(x)$ *pour différents restes.) Ainsi*

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos x} &= \frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + u^3\epsilon(u)\\ &= 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{4} + x^5\epsilon(x)\\ &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + x^5\epsilon(x)\end{aligned}$$

Finalement

$$\begin{aligned}\tan x &= \sin x \times \frac{1}{\cos x}\\ &= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^5\epsilon(x)\right) \times \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + x^5\epsilon(x)\right)\\ &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + x^5\epsilon(x)\end{aligned}$$

2. *DL de* $\frac{1+x}{2+x}$ *en 0 à l'ordre 4 .*

$$\begin{aligned}\frac{1+x}{2+x} &= (1+x)\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{x}{2}}\\ &= \frac{1}{2}(1+x)\left(1 - \frac{x}{2} + \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^3 + \left(\frac{x}{2}\right)^4 + o\left(x^4\right)\right)\\ &= \frac{1}{2} + \frac{x}{4} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{x^4}{32} + o\left(x^4\right)\end{aligned}$$

3. Si l'on souhaite calculer le DL de $\frac{\sin x}{\operatorname{sh} x}$ en 0 à l'ordre 4 alors on écrit

$$\begin{aligned}\frac{\sin x}{\operatorname{sh} x} &= \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o\left(x^5\right)}{x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o\left(x^5\right)} = \frac{x\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + o\left(x^4\right)\right)}{x\left(1 + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + o\left(x^4\right)\right)} \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + o\left(x^4\right)\right) \times \frac{1}{1 + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + o\left(x^4\right)} \\ &= \cdots = 1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{18} + o\left(x^4\right)\end{aligned}$$

Autre méthode Soit $f(x) = C(x) + x^n\epsilon_1(x)$ et $g(x) = D(x) + x^n\epsilon_2(x)$. Alors on écrit la division suivant les puissances croissantes de C par D à l'ordre n : $C = DQ + x^{n+1}R$ avec $\deg Q \leqslant n$. Alors Q est la partie polynomiale du DL en 0 à l'ordre n de f/g.

Exemple 3.6 *Calculons le DL de la fonction $f(x) = \sin x/\cos x$ à l'ordre 3 au point 0 . On a*

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon_1(x), \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + x^3\varepsilon_2(x).$$

Appliquons la division selon les puissances croissantes :

$$\begin{array}{c|c} x - \frac{1}{6}x^3 & 1 - \frac{1}{2}x^2 \\ \hline \frac{x - \frac{1}{2}x^3}{\frac{x^3}{3}} & x + \frac{1}{3}x^3 \end{array}$$

Par conséquent, $\frac{\sin x}{\cos x} = x + \frac{1}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x)$.

4 D.L. au voisinage de x_0 et de l'infini

Définition 4.1 *La fonction f admet un DL au voisinage dun point a si et seulement si la fonction $x \longrightarrow f(x+a)$ admet un DL au voisinage de 0. Souvent on ramène donc le problème en 0 en faisant le changement de variables $h = x - a$.*

Définition 4.2 *Soit f une fonction définie sur un intervalle $I =]x_0, +\infty[$. On dit que f admet un DL en $+\infty$ à l'ordre n s'il existe des réels $c_0, c_1, \ldots, c_n$ tels que*

$$f(x) = c_0 + \frac{c_1}{x} + \cdots + \frac{c_n}{x^n} + \frac{1}{x^n}\epsilon\left(\frac{1}{x}\right)$$

où $\epsilon\left(\frac{1}{x}\right)$ tend vers 0 quand $x \to +\infty$.

Remarque 4.1 *On peut définir de même ce quest un DL en $-\infty$*

Exemple 4.1 *DL de $f(x) = \exp x$ en 1 .*
On pose $h = x - 1$. Si x est proche de 1 alors h est proche de 0 . Nous allons nous ramener à un DL de exp h en $h = 0$. On note $e = \exp 1$

$$\begin{aligned}\exp x &= \exp(1 + (x-1)) = \exp(1)\exp(x-1) = e\exp h \\ &= e\left(1 + h + \frac{h^2}{2!} + \cdots + \frac{h^n}{n!} + h^n\epsilon(h)\right) \\ &= e\left(1 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2!} + \cdots + \frac{(x-1)^n}{n!} + (x-1)^n\epsilon(x-1)\right)\end{aligned}$$

où $\lim\limits_{x\to 1}\epsilon(x-1) = 0$.
2) Le D.L. de $x \longmapsto e^x$ au $V(+\infty)$. Au voisinage de l'infini, il suffit de poser $y = \frac{1}{x}$. On a

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o\left(x^n\right)$$

et donc

$$e^{\frac{1}{y}} = 1 + \frac{1}{y} + \frac{1}{2y^2} + \frac{1}{3!y^3} + \ldots + \frac{1}{n!y^n} + o\left(\frac{1}{y^n}\right).$$

5 Applications des D.L

Les D.L. sont trés utiles dans la recherche des limites de fonctions et l'étude des formes indéterminées

Exemple 5.1 *Trouver la limite lorsque x tend vers 0 de la fonction*

$$f(x) = \frac{\sin x - x\cos x}{x(1-\cos x)}.$$

On a

$$\begin{aligned}\sin x &= x - \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right) \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + o\left(x^2\right)\end{aligned}$$

et par suite

$$f(x) = \frac{\frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)}{\frac{x^3}{2} + o\left(x^3\right)}.$$

Finalement $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \dfrac{2}{3}$