

Séries numériques

Luc Rozoy, Bernard Ycart

Disons-le tout net, ce chapitre n'est pas indispensable : d'ailleurs, vous ne verrez pas vraiment la différence avec les suites. Normal, il n'y en a pas. Alors pourquoi l'étudier ? Au moins pour être sûr que vous ayez bien assimilé la notion de limite : si vous avez bien compris la convergence des suites, vous ne devriez pas avoir de problème ici. Les séries sont très proches des intégrales sur un intervalle non borné, et nous y ferons allusion à plusieurs reprises. Vous apprendrez plus tard qu'il s'agit de deux cas particuliers du même objet. Cependant, vous n'êtes pas du tout obligés d'avoir assimilé les intégrales pour comprendre les séries.

Table des matières

1	Cours	1
1.1	Définitions et propriétés	1
1.2	Séries à termes positifs ou nuls	5
1.3	Critères de Cauchy et de d'Alembert	10
1.4	Séries à termes quelconques	14
1.5	Sommes de séries	17
1.6	Vitesse de convergence	19
2	Entraînement	22
2.1	Vrai ou faux	22
2.2	Exercices	25
2.3	QCM	32
2.4	Devoir	35
2.5	Corrigé du devoir	37
3	Compléments	43
3.1	De Zénon d'Élée à von Neumann	43
3.2	Le théorème de Merton	46
3.3	La série harmonique	49
3.4	De seriebus divergentibus	50
3.5	Vous avez le choix !	54

1 Cours

1.1 Définitions et propriétés

Définition 1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels ou de complexes. On appelle série de terme général u_n , et on note $\sum u_n$ la suite des sommes partielles, $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$, où pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$s_n = u_0 + \cdots + u_n = \sum_{i=0}^n u_i.$$

Comme premier exemple de série, observons le développement décimal d'un réel strictement compris entre 0 et 1.

$$x = 0, a_1 a_2 \dots a_n \dots, \quad \text{où pour tout } n, a_n \in \{0, 1, \dots, 9\}.$$

Cette écriture correspond en fait à la série de terme général $\frac{a_n}{10^n}$. La somme partielle s_n est l'approximation décimale par défaut à 10^{-n} près. Voici les 50 premières décimales de $\sqrt{\frac{1}{2}}$.

$$\sqrt{\frac{1}{2}} = 0.70710678118654752440084436210484903928483593768847 \dots$$

Les nombres décimaux $s_1 = 0.7$, $s_3 = 0.707$, $s_6 = 0.707106$ sont des sommes partielles de la série.

Les deux séries les plus souvent utilisées sont la série géométrique et la série exponentielle.

Série géométrique

Le terme général d'une série géométrique est $u_n = r^n$. Les sommes partielles ont une expression explicite.

$$s_n = \sum_{i=0}^n r^i = 1 + r + \cdots + r^n = \begin{cases} n+1 & \text{si } r = 1 \\ \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} & \text{si } r \neq 1 \end{cases}$$

Série exponentielle

Le terme général de la série exponentielle est $u_n = 1/n!$, où $n!$ (factorielle) désigne le produit des entiers de 1 à n . Par convention, $0! = 1$. Les sommes partielles s_n sont des rationnels mais n'ont pas d'expression explicite.

Observons que n'importe quelle suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ peut être vue comme une série, de terme général $u_n = s_n - s_{n-1}$, pour $n \geq 1$ et $u_0 = s_0$. Dans la plupart des cas, les sommes partielles n'ont pas d'expression explicite, et c'est souvent pour cela que l'on parle de série plutôt que de suite.

Définition 2. On dit que la série $\sum u_n$ converge vers s si la suite des sommes partielles converge vers s , qui est appelée somme de la série.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = s \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n u_k = s .$$

Dans le cas contraire, on dit que la série diverge.

Par exemple, le réel x est la limite de ses approximations décimales, et aussi la somme de la série $\sum \frac{a_n}{10^n}$.

La série géométrique $\sum r^n$ converge si et seulement si $|r| < 1$. Dans ce cas, la somme est $\frac{1}{1-r}$.

$$|r| < 1 \implies \sum_{n=0}^{+\infty} r^n = \frac{1}{1-r} .$$

La somme de la série exponentielle est le nombre e , dont le logarithme népérien vaut 1.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e \simeq 2.71828 .$$

Voici un exemple de série dont les sommes partielles sont explicitement calculables.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 1 .$$

En effet,

$$u_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

donc

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = 1 - \frac{1}{n+2} ,$$

et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{n+2} = 1 .$$

Considérons une série $\sum u_n$ et définissons la fonction en escalier f sur $[0, +\infty[$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [n, n+1[, \quad f(t) \equiv u_n .$$

La somme partielle s_n est l'intégrale de f sur l'intervalle $[0, n+1]$. La série $\sum u_n$ converge si et seulement si l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge (voir figure 1).

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \int_0^{+\infty} f(t) dt .$$

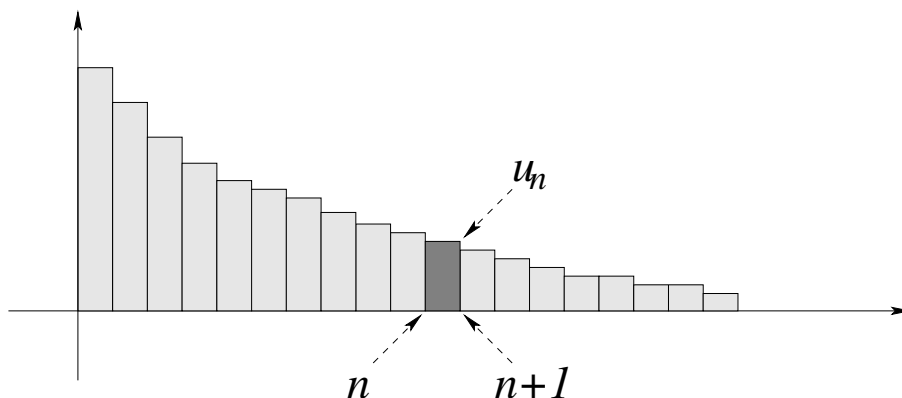


FIGURE 1 – Somme d’une série, vue comme l’intégrale d’une fonction en escaliers sur $[0, +\infty[$.

Réciproquement, l’intégrale d’une fonction quelconque sur $[0, +\infty[$ peut être vue comme la somme de la série dont le terme général est l’intégrale sur $[n, n+1[$. Nous utiliserons par la suite cette parenté entre séries et intégrales.

Comme la convergence d’une intégrale ne dépend que du comportement de la fonction à l’infini, la convergence d’une série ne dépend pas de ses premiers termes. Changer un nombre fini de termes d’une série ajoute une même constante à toutes les sommes partielles à partir d’un certain rang. Cela ne change pas la nature, convergente ou divergente. Si elle est convergente, sa somme est évidemment modifiée. Par exemple :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e - 1 .$$

Le fait de calculer la somme d’une série à partir de $n = 0$ est purement conventionnel. On peut toujours effectuer un changement d’indice pour se ramener à une somme à partir de 0. Par exemple :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(m+1)(m+2)} = 1 ,$$

en posant $m = n - 2$.

Le terme général d’une série convergente tend vers 0.

Théorème 1. Si la série $\sum u_n$ converge, alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = s \implies \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0 .$$

La contraposée de ce résultat est souvent utilisée : une série dont le terme général ne tend pas vers 0 ne peut pas converger.

Démonstration : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $s_n = \sum_{k=0}^n u_k$. Pour tout $n \geq 1$, $u_n = s_n - s_{n-1}$. Si $\sum u_n$ converge, la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers la somme s de la série. Il en est de même de la suite $(s_{n-1})_{n \in \mathbb{N}^*}$. Par linéarité de la limite, la suite u_n tend vers $s - s = 0$. $\square$

Par exemple la série de terme général

$$u_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 2^k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

diverge : même si les termes non nuls sont très rares il y en a quand même une infinité !

Le fait que le terme général tende vers 0 n'est qu'une condition nécessaire de convergence. De nombreuses séries divergentes ont un terme général qui tend vers 0. Par exemple, la série de terme général $u_n = \frac{1}{n+1}$ diverge. En effet :

$$s_{2n-1} - s_{n-1} = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

La suite des sommes partielles n'est pas de Cauchy, donc elle ne converge pas.

La linéarité des limites entraîne immédiatement le théorème suivant.

Théorème 2. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries convergentes, de sommes respectives s et t . Soient α et β deux complexes quelconques. Alors la série de terme général $\alpha u_n + \beta v_n$ est convergente, et sa somme est $\alpha s + \beta t$.

Par exemple :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2}.$$

Comme conséquence de la linéarité, observons que si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge, alors $\sum u_n + v_n$ diverge. Comme autre conséquence, pour $\alpha \neq 0$, $\sum \alpha u_n$ converge si et seulement si $\sum u_n$ converge.

Pour les séries à termes complexes la convergence équivaut à celle des parties réelle et imaginaire.

Proposition 1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de complexes. Pour tout n , notons a_n et b_n la partie réelle et la partie imaginaire de u_n . La série $\sum u_n$ converge si et seulement si les deux séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent. Si c'est le cas, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + i \sum_{n=0}^{+\infty} b_n.$$

Démonstration : Rappelons qu'une suite de nombres complexes converge si et seulement si la suite des parties réelles et la suite des parties imaginaires convergent. Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux suites de réels :

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} B_n = B \right) \iff \left(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n + i B_n = A + i B \right)$$

Il suffit d'appliquer ce résultat à

$$A_n = \sum_{k=0}^n a_k \text{ et } B_n = \sum_{k=0}^n b_k ,$$

car la partie réelle d'une somme est la somme des parties réelles, et la partie imaginaire d'une somme est la somme des parties imaginaires. $\square$

Considérons par exemple la série géométrique $\sum r^n$, où r est un complexe de module $\rho < 1$ et d'argument θ : $r = \rho e^{i\theta}$. Pour tout n , $r^n = \rho^n e^{in\theta}$. Les parties réelle et imaginaire de r^n sont

$$a_n = \rho^n \cos(n\theta) \quad \text{et} \quad b_n = \rho^n \sin(n\theta) .$$

On déduit de la proposition précédente que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1-r} \right) \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} b_n = \operatorname{Im} \left(\frac{1}{1-r} \right) .$$

Le calcul donne :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \rho^n \cos(n\theta) = \frac{1 - \rho \cos(\theta)}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\theta)} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \rho^n \sin(n\theta) = \frac{\rho \sin(\theta)}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\theta)} .$$

1.2 Séries à termes positifs ou nuls

Les séries à termes positifs ou nuls sont plus faciles à étudier. En effet si $u_n \geq 0$ pour tout n , la suite des sommes partielles est croissante.

$$s_n - s_{n-1} = u_n \geq 0 .$$

Une suite croissante $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'a que deux comportements possibles. Soit elle est majorée et elle converge, soit elle tend vers $+\infty$.

Les séries à termes positifs se comparent comme les intégrales de fonctions positives.

Théorème 3. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs ou nuls. On suppose qu'il existe $n_0 \geq 0$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $u_n \leq v_n$.

- Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.
- Si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge.

Démonstration : Comme nous l'avons observé, la convergence ne dépend pas des premiers termes. On peut donc étudier les sommes partielles à partir de n_0 . Pour tout $n \geq n_0$, notons $s_n = u_{n_0} + \dots + u_n$ et $t_n = v_{n_0} + \dots + v_n$. Les suites $(s_n)_{n \geq n_0}$ et $(t_n)_{n \geq n_0}$ sont croissantes, et de plus pour tout $n \geq n_0$, $s_n \leq t_n$. Si la série $\sum v_n$ converge, alors la suite (t_n) converge. Soit t sa limite. La suite (s_n) est croissante, et majorée par t , donc

elle converge, donc la série $\sum u_n$ converge aussi. Inversement, si la série $\sum u_n$ diverge, alors la suite (s_n) tend vers $+\infty$, et il en est de même pour la suite (t_n) . $\square$

Comme premier exemple, considérons un développement décimal. Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite d'entiers tous compris entre 0 et 9. La série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n} \text{ converge.}$$

En effet, son terme général $u_n = \frac{a_n}{10^n}$ est majoré par $\frac{9}{10^n}$. La série géométrique $\sum \frac{1}{10^n}$ converge, car $\frac{1}{10} < 1$. La série $\sum \frac{9}{10^n}$ converge aussi par linéarité, d'où le résultat.

Nous avons déjà vu que la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} \text{ converge.}$$

Nous allons en déduire que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \text{ converge.}$$

En effet :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2n^2}}{\frac{1}{(n+1)(n+2)}} = \frac{1}{2}.$$

En particulier, il existe n_0 tel que pour $n \geq n_0$:

$$\frac{1}{2n^2} \leq \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

En fait c'est vrai pour $n \geq 4$, mais il est inutile de calculer une valeur précise de n_0 . On en déduit que la série de terme général $\frac{1}{2n^2}$ converge, d'où le résultat par linéarité. Montrons maintenant que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\ln(n))^\alpha}{n^3} \text{ converge,}$$

pour tout réel α . En effet :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (\ln(n))^\alpha = 0.$$

Donc il existe n_0 tel que pour $n \geq n_0$,

$$\frac{1}{n} (\ln(n))^\alpha \leq 1.$$

En multipliant les deux membres par $\frac{1}{n^2}$:

$$\frac{(\ln(n))^\alpha}{n^3} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Comme la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, il en est de même de la série $\sum \frac{(\ln(n))^\alpha}{n^3}$, par le théorème 3.

Inversement, nous avons vu que la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge. On en déduit facilement que les séries $\sum \frac{\ln(n)}{n}$ et $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergent également.

Le théorème de comparaison permet d'utiliser des équivalents.

Théorème 4. Soient (u_n) et (v_n) deux suites à termes strictement positifs, équivalentes au voisinage de $+\infty$.

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = 1.$$

Alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature (convergentes ou divergentes).

Démonstration : Par hypothèse, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$,

$$\left| \frac{u_n}{v_n} - 1 \right| < \varepsilon \iff (1 - \varepsilon)v_n < u_n < (1 + \varepsilon)v_n.$$

Fixons $\varepsilon < 1$. Si $\sum u_n$ converge, alors par le théorème de comparaison 3, $\sum (1 - \varepsilon)v_n$ converge, donc $\sum v_n$ également. Réciproquement, si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum (1 + \varepsilon)v_n$ diverge, et $\sum v_n$ aussi. $\square$

Par exemple,

$$\begin{aligned} \sum \frac{n^2 + 3n + 1}{n^4 + 2n^3 + 4} & \text{ converge,} \\ \sum \frac{n + \ln(n)}{n^3} & \text{ converge.} \end{aligned}$$

Dans les deux cas, le terme général est équivalent à $\frac{1}{n^2}$, et nous avons vu que la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge. Par contre

$$\begin{aligned} \sum \frac{n^2 + 3n + 1}{n^3 + 2n^2 + 4} & \text{ diverge,} \\ \sum \frac{n + \ln(n)}{n^2} & \text{ diverge.} \end{aligned}$$

Dans les deux cas, le terme général est équivalent à $\frac{1}{n}$, et nous avons vu que la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

Les théorèmes 3 et 4 permettent de ramener les séries à termes positifs à un catalogue de séries dont la convergence est connue. Dans ce catalogue, on trouve les séries de Riemann $\sum n^{-\alpha}$ et de Bertrand $\sum n^{-1}(\ln(n))^{-\beta}$. On les étudie en utilisant les intégrales correspondantes grâce au théorème suivant, illustré sur la figure 2.

Théorème 5. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$, décroissante. La série de terme général $u_n = f(n)$ est de même nature (convergente ou divergente) que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$.

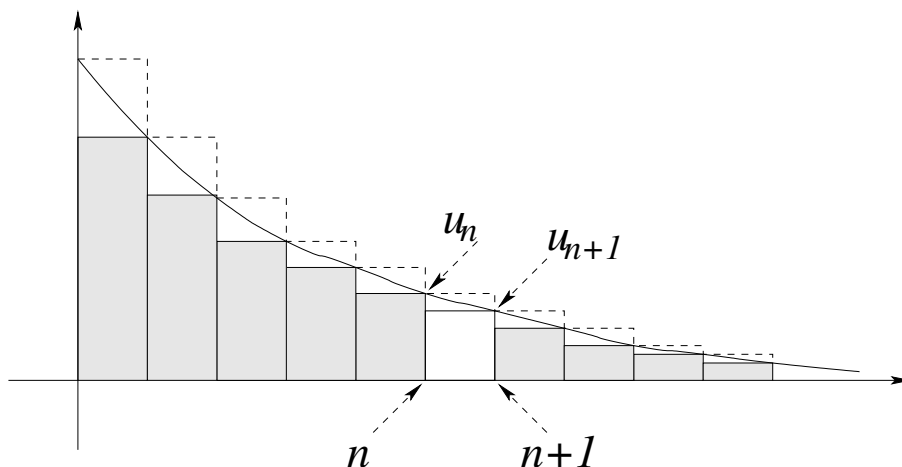


FIGURE 2 – Comparaison entre une série à termes positifs et l'intégrale d'une fonction décroissante sur $[0, +\infty[$.

Démonstration : Comme f est décroissante, les inégalités $u_n \geq f(x) \geq u_{n+1}$ sont vraies pour tout $x \in [n, n+1]$. En intégrant entre n et $n+1$ on obtient :

$$u_n \geq \int_n^{n+1} f(t) dt \geq u_{n+1} .$$

Par la relation de Chasles, la somme de 0 à n donne :

$$u_0 + \cdots + u_n \geq \int_0^{n+1} f(t) dt \geq u_1 + \cdots + u_{n+1} .$$

La série $\sum u_n$ converge et a pour somme s , si et seulement si la suite des sommes partielles converge vers s . Dans ce cas $\int_0^{n+1} f(t) dt$ est majorée par s , et comme $\int_0^x f(t) dt$ est fonction croissante de x , l'intégrale converge. Réciproquement, si l'intégrale converge, alors $\int_0^{n+1} f(t) dt$ est majorée, la suite des sommes partielles aussi, et elle converge. $\square$

Rappelons que le point de départ de la sommation n'a pas d'influence sur la convergence des séries. Le théorème 5 reste vrai pour des fonctions définies sur $[N, +\infty[$ au lieu de $[0, +\infty[$. Nous l'appliquons à $f(t) = t^{-\alpha}$, puis $f(t) = t^{-1}(\ln(t))^{-\beta}$.

$$\int_1^x t^{-\alpha} dt = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}(x^{1-\alpha} - 1) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \ln(x) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

$$\int_2^x t^{-1}(\ln(t))^{-\beta} dt = \begin{cases} \frac{1}{1-\beta}(\ln(x)^{1-\beta} - \ln(2)^{1-\beta}) & \text{si } \beta \neq 1 \\ \ln(\ln(x)) - \ln(\ln(2)) & \text{si } \beta = 1 \end{cases}$$

Séries de Riemann

$$\text{Si } \alpha \leq 1 \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-\alpha} \text{ diverge.}$$

$$\text{Si } \alpha > 1 \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-\alpha} \text{ converge.}$$

Séries de Bertrand

$$\text{Si } \beta \leq 1 \quad \sum_{n=2}^{+\infty} n^{-1} (\ln(n))^{-\beta} \text{ diverge.}$$

$$\text{Si } \beta > 1 \quad \sum_{n=2}^{+\infty} n^{-1} (\ln(n))^{-\beta} \text{ converge.}$$

Nous retrouvons en particulier le fait que $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, alors que $\sum \frac{1}{n}$ diverge. Voici deux exemples d'utilisation des équivalents pour la comparaison avec les séries de Riemann et de Bertrand.

La série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) \text{ converge.}$$

En effet :

$$\ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2},$$

et la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

La série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - \cos \left(\frac{1}{n\sqrt{\ln(n)}} \right)}{\sin \left(\frac{1}{n} \right)} \text{ diverge.}$$

En effet :

$$\frac{1 - \cos \left(\frac{1}{n\sqrt{\ln(n)}} \right)}{\sin \left(\frac{1}{n} \right)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n \ln(n)},$$

et la série de Bertrand $\sum \frac{1}{n \ln(n)}$ diverge.

Nous allons à nouveau appliquer le théorème de comparaison, pour montrer que si le terme général d'une série est un produit de facteurs dont l'un est dominant, alors la nature de la série est dictée par le terme dominant.

Proposition 2. Soient r et r' deux réels tels que $0 < r < r' < 1$. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que $\left(\frac{r}{r'}\right)^n a_n$ soit bornée. Alors la série

$$\sum r^n |a_n| \text{ converge.}$$

Démonstration : Par hypothèse, il existe M tel que :

$$\left| \left(\frac{r}{r'} \right)^n a_n \right| < M .$$

En multipliant les deux membres par r'^n , on obtient :

$$|r^n a_n| \leq M r'^n .$$

D'où le résultat par le théorème de comparaison 3, puisque $\sum r'^n$ converge. $\square$

Comme application de cette proposition, si r est tel que $0 < r < 1$ et α est un réel quelconque, la série

$$\sum n^\alpha r^n \text{ converge.}$$

Proposition 3. Soient α et α' deux réels tels que $1 < \alpha' < \alpha$ et (a_n) une suite telle que $n^{-(\alpha-\alpha')} a_n$ soit bornée. Alors la série

$$\sum n^{-\alpha} |a_n| \text{ converge.}$$

Démonstration : Par hypothèse, il existe M tel que :

$$\left| n^{-(\alpha-\alpha')} a_n \right| < M .$$

En multipliant les deux membres par $n^{-\alpha'}$, on obtient :

$$|n^{-\alpha} a_n| \leq M n^{-\alpha'} .$$

D'où le résultat par le théorème de comparaison 3, puisque $\sum n^{-\alpha'}$ converge. $\square$

Comme conséquence de cette proposition, pour tout $\alpha > 1$ et pour tout réel β ,

$$\sum n^{-\alpha} (\ln(n))^\beta \text{ converge.}$$

Dans le catalogue des séries dont la nature est connue, on trouve aussi les séries géométriques et la série exponentielle. Pour la comparaison avec les séries géométriques, il existe deux critères mieux adaptés que les équivalents. Ils font l'objet de la section suivante.

1.3 Critères de Cauchy et de d'Alembert

Rappelons tout d'abord que la série géométrique $\sum r^n$ converge si $|r| < 1$, diverge sinon. Les critères de Cauchy et de d'Alembert permettent de comparer une série à termes positifs avec les séries géométriques. Pour comparer u_n avec r^n , le critère de Cauchy porte sur $\sqrt[n]{u_n} = (u_n)^{\frac{1}{n}}$, le critère de d'Alembert sur $\frac{u_{n+1}}{u_n}$. Voici le premier.

Théorème 6. (Critère de Cauchy) Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs ou nuls.

- S'il existe une constante $r < 1$ et un entier n_0 tels que pour tout $n \geq n_0$,

$$\sqrt[n]{u_n} < r < 1, \quad \text{alors} \quad \sum u_n \text{ converge.}$$

- S'il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$,

$$\sqrt[n]{u_n} > 1, \quad \text{alors} \quad \sum u_n \text{ diverge.}$$

Démonstration : Rappelons que la nature de la série ne dépend pas de ses premiers termes. Dans le premier cas,

$$\sqrt[n]{u_n} < r \implies u_n < r^n.$$

Si $0 < r < 1$, alors la série $\sum r^n$ converge, d'où le résultat par le théorème de comparaison 3.

Dans le second cas,

$$\sqrt[n]{u_n} > 1 \implies u_n > 1.$$

Le terme général ne tend pas vers 0, donc la série diverge. $\square$

Comme exemple d'application, revenons sur les développements décimaux. Étant donnée une suite (a_n) d'entiers tous compris entre 0 et 9, la série $\sum \frac{a_n}{10^n}$ converge. En effet, $\sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{10} \sqrt[n]{a_n}$. Or $\sqrt[n]{a_n} \leq \sqrt[n]{9} = \exp(\frac{1}{n} \ln(9))$, qui tend vers 1. Donc il existe n_0 tel que pour $n > n_0$, $\sqrt[n]{u_n} < \frac{2}{10}$, et la première partie du critère s'applique. Observons que la suite $\sqrt[n]{u_n}$ ne converge pas, sauf si les a_n sont tous nuls ou tous non nuls : $\sqrt[n]{a_n}$ vaut 0 si $a_n = 0$.

Dans les cas où la suite $(\sqrt[n]{u_n})$ converge, la position de sa limite par rapport à 1 détermine la nature de la série $\sum u_n$.

Corollaire 1. Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs, telle que $\sqrt[n]{u_n}$ converge vers l .

- Si $l < 1$ alors $\sum u_n$ converge.
- Si $l > 1$ alors $\sum u_n$ diverge.

Si $\sqrt[n]{u_n}$ tend vers 1, on ne peut pas conclure en général.

Démonstration : Par définition de la limite, si $l < 1$, alors il existe n_0 tel que pour tout $n > n_0$,

$$\sqrt[n]{u_n} < l + \frac{1-l}{2} = \frac{l+1}{2} < 1,$$

et le premier cas du théorème 6 s'applique.

Si $l > 1$, alors il existe n_0 tel que pour tout $n > n_0$,

$$\sqrt[n]{u_n} > l - (l-1) = 1,$$

et le second cas du théorème 6 s'applique. $\square$

Par exemple,

$$\sum \left(\frac{2n+1}{3n+4} \right)^n \text{ converge,}$$

car $\sqrt[n]{u_n}$ tend vers $\frac{2}{3} < 1$.

$$\sum \left(\frac{2n+4}{2n+1} \right)^n \text{ diverge,}$$

car $\sqrt[n]{u_n} > 1$.

Le critère de Cauchy ne s'applique ni aux séries de Riemann, ni aux séries de Bertrand.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^{-\alpha}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^{-1}(\ln(n))^{-\beta}} = 1.$$

Or certaines de ces séries convergent, d'autres divergent.

Le critère de d'Alembert est plus facile à appliquer, par contre il échoue plus souvent que celui de Cauchy.

Théorème 7. (Critère de d'Alembert) *Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs.*

- *S'il existe une constante $r < 1$ et un entier n_0 tels que pour tout $n \geq n_0$,*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < r < 1, \quad \text{alors} \quad \sum u_n \text{ converge.}$$

- *S'il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$,*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1, \quad \text{alors} \quad \sum u_n \text{ diverge.}$$

Démonstration : Rappelons que la nature de la série ne dépend pas de ses premiers termes. Dans le premier cas, on vérifie par récurrence que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < r \implies u_n < u_{n_0} r^{-n_0} r^n.$$

Si $0 < r < 1$, alors la série $\sum r^n$ converge, d'où le résultat par le théorème de comparaison 3.

Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, la suite (u_n) est croissante, elle ne peut donc pas tendre vers 0 et la série diverge. $\square$

Observons que le théorème ne peut s'appliquer que si les u_n sont tous non nuls. En particulier, il ne s'applique pas aux développements décimaux, contrairement au critère de Cauchy.

Définissons la suite u_n par :

$$u_n = \begin{cases} \frac{1}{3^k} & \text{si } n = 2k \\ \frac{2}{3^{k+1}} & \text{si } n = 2k + 1 \end{cases}$$

Le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ vaut $\frac{2}{3}$ si n est pair, $\frac{1}{2}$ si n est impair. Il est donc toujours inférieur à $2/3$, et la série converge.

Définissons maintenant :

$$u_n = \begin{cases} \frac{2^k}{3^k} & \text{si } n = 2k \\ \frac{2^k}{3^{k+1}} & \text{si } n = 2k + 1 \end{cases}$$

Le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ vaut $\frac{1}{3}$ si n est pair, 2 si n est impair. Le critère de d'Alembert ne s'applique pas. Pourtant, $\sqrt[n]{u_n}$ converge vers $\sqrt[3]{\frac{2}{3}} < 1$, donc le critère de Cauchy s'applique (la série converge).

Ici encore, quand la suite $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ converge, la position de la limite par rapport à 1 détermine la nature de la série.

Corollaire 2. Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs, telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ converge vers l .

- Si $l < 1$ alors $\sum u_n$ converge.
- Si $l > 1$ alors $\sum u_n$ diverge.

Si $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, on ne peut pas conclure en général.

Démonstration : Par définition de la limite, si $l < 1$, alors il existe n_0 tel que pour tout $n > n_0$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < l + \frac{1-l}{2} = \frac{l+1}{2} < 1,$$

et le premier cas du théorème 7 s'applique.

Si $l > 1$, alors il existe n_0 tel que pour tout $n > n_0$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > l - (l-1) = 1,$$

et le second cas du théorème 7 s'applique. □

Par exemple, pour tout réel positif r , la série exponentielle

$$\sum \frac{r^n}{n!} \text{ converge.}$$

car $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{r}{n+1}$ tend vers $0 < 1$. (On pourrait aussi appliquer le critère de Cauchy, mais c'est moins facile.)

$$\sum \frac{n!}{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)} \text{ converge,}$$

car $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{2n+1}$ tend vers $\frac{1}{2} < 1$.

$$\sum \frac{(2n)!}{(n!)^2} \text{ diverge,}$$

car $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2}$ tend vers $4 > 1$.

Le critère de d'Alembert ne s'applique ni aux séries de Riemann, ni aux séries de Bertrand.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{-\alpha}}{(n+1)^{-\alpha}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{-1}(\ln(n))^{-\beta}}{(n+1)^{-1}(\ln(n+1))^{-\beta}} = 1.$$

Plus généralement, si u_n est une fraction rationnelle en n et $\ln(n)$, alors les deux critères échouent. Dans ce cas, il faut calculer un équivalent et appliquer le théorème 4.

Nous avons vu un exemple pour lequel seul le critère de Cauchy donnait la réponse. Il est en effet plus puissant, comme le montre la proposition suivante.

Proposition 4. *Soit (u_n) une suite à termes positifs.*

$$\text{Si } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l \quad \text{alors} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = l.$$

Démonstration : Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$,

$$l - \varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < l + \varepsilon.$$

Par récurrence, on en déduit :

$$u_{n_0}(l - \varepsilon)^{n-n_0} < u_n < u_{n_0}(l + \varepsilon)^{n-n_0}.$$

or :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_{n_0}(l - \varepsilon)^{n-n_0}} = l - \varepsilon \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_{n_0}(l + \varepsilon)^{n-n_0}} = l + \varepsilon.$$

Donc il existe $n_1 > n_0$ tel que pour $n > n_1$,

$$l - 2\varepsilon < u_n < l + 2\varepsilon,$$

d'où le résultat. □

1.4 Séries à termes quelconques

Quand une série n'est pas à termes positifs, la première chose à faire est d'examiner la série des valeurs absolues, ou des modules s'il s'agit de nombres complexes.

Définition 3. *On dit que la série $\sum u_n$ est absolument convergente si la série $\sum |u_n|$ converge.*

Théorème 8. *Une série absolument convergente est convergente.*

Démonstration : Supposons pour commencer que les u_n sont réels. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons

$$u_n^+ = \begin{cases} u_n & \text{si } u_n \geq 0 \\ 0 & \text{si } u_n < 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad u_n^- = \begin{cases} 0 & \text{si } u_n \geq 0 \\ -u_n & \text{si } u_n < 0 \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq u_n^+ \leq |u_n| \quad \text{et} \quad 0 \leq u_n^- \leq |u_n|$$

Par le théorème de comparaison, si $\sum |u_n|$ converge, alors $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ convergent. Par linéarité, $\sum u_n^+ - u_n^-$ converge, or $u_n^+ - u_n^- = u_n$. D'où le résultat.

Passons maintenant au cas où les u_n sont complexes. Notons a_n la partie réelle de u_n et b_n sa partie imaginaire. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq |a_n| \leq |u_n| \quad \text{et} \quad 0 \leq |b_n| \leq |u_n|.$$

Par le théorème de comparaison, si $\sum |u_n|$ converge, alors $\sum |a_n|$ et $\sum |b_n|$ convergent aussi. Donc $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent, en appliquant le cas des séries à termes réels. Donc $\sum u_n$ converge (proposition 1). $\square$

Par exemple, pour tout θ , la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in\theta}}{n^2} \quad \text{est absolument convergente.}$$

En effet, $|\frac{e^{in\theta}}{n^2}| = \frac{1}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

Comme autre exemple, pour tout complexe z , la série exponentielle

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \text{est absolument convergente,}$$

car $\sum \frac{r^n}{n!}$ converge pour tout réel positif r (application du critère de d'Alembert).

Il existe des séries convergentes, mais qui ne sont pas absolument convergentes. Considérons par exemple

$$u_n = \begin{cases} \frac{1}{k+1} & \text{si } n = 2k \\ \frac{-1}{k+1} & \text{si } n = 2k + 1 \end{cases}$$

Les termes successifs s'annulent deux à deux, de sorte que les sommes partielles valent

$$s_n = \begin{cases} \frac{1}{k+1} & \text{si } n = 2k \\ 0 & \text{si } n = 2k + 1 \end{cases}$$

La suite des sommes partielles tend vers 0. Par contre la suite des sommes partielles de $\sum |u_n|$ tend vers $+\infty$, par comparaison avec la série de Riemann $\sum \frac{1}{n}$. Pour traiter ce type de cas, on dispose du théorème suivant, dit *théorème d'Abel* (un résultat analogue existe pour les intégrales).

Théorème 9. Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites telles que :

1. La suite $(a_n)_{n \geq N}$ est une suite décroissante de réels positifs, et tend vers 0.
2. Les sommes partielles de la suite $(b_n)_{n \geq N}$ sont bornées :

$$\exists M, \forall n \in \mathbb{N}, \quad |b_0 + \cdots + b_n| \leq M.$$

Alors la série $\sum a_n b_n$ converge.

Démonstration : L'idée de la démonstration est d'effectuer un changement dans la sommation, qui s'apparente à une intégration par parties. Pour tout $n \geq 0$, posons $B_n = b_0 + \cdots + b_n$. Par hypothèse, la suite (B_n) est bornée. Nous écrivons les sommes partielles de la série $\sum a_n b_n$ sous la forme suivante.

$$\begin{aligned} s_n = a_0 b_0 + a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n &= a_0 B_0 + a_1 (B_1 - B_0) + a_n (B_n - B_{n-1}) \\ &= B_0 (a_0 - a_1) + B_1 (a_1 - a_2) + \cdots + B_n a_n. \end{aligned}$$

Comme B_n est borné, et a_n tend vers 0, le terme $B_n a_n$ tend vers 0. Nous allons montrer que la série $\sum B_n (a_n - a_{n+1})$ est absolument convergente. En effet,

$$|B_n (a_n - a_{n+1})| = |B_n| (a_n - a_{n+1}) \leq M (a_n - a_{n+1}),$$

car la suite (a_n) est une suite de réels positifs, décroissante, et $|B_n|$ est borné par M . Or :

$$M(a_0 - a_1) + \cdots + M(a_n - a_{n+1}) = M(a_0 - a_{n+1}),$$

qui tend vers Ma_0 puisque (a_n) tend vers 0. La série $\sum M(a_n - a_{n+1})$ converge, donc la série $\sum |B_n (a_n - a_{n+1})|$ aussi, par le théorème de comparaison 3. Donc la série $\sum B_n (a_n - a_{n+1})$ est convergente, donc la suite (s_n) est convergente. $\square$

Le cas d'application le plus fréquent est celui où $b_n = e^{in\theta}$.

Corollaire 3. Soit θ un réel tel que $\theta \neq 2k\pi$, $\forall k \in \mathbb{Z}$. Soit (a_n) une suite de réels positifs, décroissante, tendant vers 0 à l'infini. Les séries

$$\sum e^{in\theta} a_n, \quad \sum \cos(n\theta) a_n, \quad \sum \sin(n\theta) a_n \quad \text{convergent.}$$

Démonstration : Pour appliquer le théorème d'Abel 9 avec $b_n = e^{in\theta}$, nous devons vérifier que les sommes partielles de la suite $(e^{in\theta})$ sont bornées. Or $e^{in\theta} = (e^{i\theta})^n$, et par hypothèse $e^{i\theta}$ est différent de 1. On a donc :

$$\begin{aligned} |1 + \cdots + e^{in\theta}| &= \left| \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} \right| \\ &\leq \left| \frac{2}{1 - e^{i\theta}} \right|. \end{aligned}$$

D'où le résultat. La convergence des séries $\sum \cos(n\theta) a_n$ et $\sum \sin(n\theta) a_n$ est une conséquence directe de la proposition 1. $\square$

Un cas particulier fréquemment rencontré est celui où $\theta = \pi$, soit $b_n = (-1)^n$. On parle alors de *série alternée*.

Terminons par une mise en garde : il n'est pas possible de remplacer a_n par un équivalent à l'infini dans le théorème 9, car la décroissance n'est pas conservée par équivalence. Voici par exemple deux séries alternées.

$$\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \text{ converge, } \quad \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} \text{ diverge.}$$

Le théorème 9 s'applique à la première, mais pas à la seconde, car si la suite $\frac{1}{\sqrt{n} + (-1)^n}$ est positive (pour $n \geq 2$), elle n'est pas décroissante. Pourtant, on a bien :

$$\frac{1}{\sqrt{n} + (-1)^n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Pour montrer que $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$ diverge, calculons :

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} = (-1)^n \frac{\sqrt{n} + (-1)^n - \sqrt{n}}{n + (-1)^n \sqrt{n}} = \frac{1}{n + (-1)^n \sqrt{n}}.$$

Ceci est le terme général d'une série à termes positifs divergente (équivalente à la série de Riemann $\sum \frac{1}{n}$). La différence de deux séries convergentes ne peut pas être divergente.

Or $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge, donc $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$ diverge.

1.5 Sommes de séries

Il n'y a pas beaucoup de séries pour l'instant dont vous connaissiez la somme, à part la série exponentielle, les séries géométriques. Il en existe bien d'autres. Voici par exemple deux résultats classiques, dont vous rencontrerez la justification ailleurs :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2).$$

Vous aurez beaucoup plus de techniques à votre disposition après le chapitre sur les séries entières. En attendant, vous pourrez quand même calculer certaines sommes, en combinant celles que vous connaissez. Voici quelques exemples.

Considérons la série $\sum 1/(n^2 - 1)$. C'est bien une série convergente, car son terme général est positif, et équivalent à $\frac{1}{n^2}$. Nous allons démontrer que :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - 1} = \frac{3}{4}.$$

Utilisons la décomposition en éléments simples.

$$\frac{1}{n^2 - 1} = \frac{\frac{1}{2}}{n - 1} - \frac{\frac{1}{2}}{n + 1}$$

Par récurrence, on en déduit l'expression des sommes partielles.

$$s_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+1)},$$

d'où le résultat.

En utilisant la même technique de décomposition en éléments simples, vous pourrez aussi calculer les sommes suivantes.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1)} = \frac{\pi^2}{6} - 1.$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n^2 + 7n + 6}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{5}{3}.$$

Voici maintenant deux exemples de calcul de sommes que l'on ramène à une série géométrique. Pour le premier, nous revenons sur les développements décimaux. Si un nombre x est rationnel, alors son développement décimal, obtenu en divisant deux entiers, est périodique. Réciproquement, si le développement décimal d'un réel est périodique, alors ce réel est un rationnel. Nous allons le calculer. Supposons que x s'écrive :

$$x = 0, a_1 \dots a_p a_1 \dots a_p \dots$$

Le réel x est la somme de la série suivante.

$$x = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{a_1}{10} + \dots + \frac{a_p}{10^p} \right) \frac{1}{(10^p)^k}.$$

On retrouve la série géométrique $\sum r^k$, avec $r = 10^{-p}$. On en déduit :

$$x = \left(\frac{a_1}{10} + \dots + \frac{a_p}{10^p} \right) \frac{1}{1 - 10^{-p}}.$$

Soit r tel que $|r| < 1$. Nous allons montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n r^n = \frac{r}{(1-r)^2}.$$

Pour cela écrivons :

$$\begin{aligned} s &= \sum_{n=0}^{+\infty} n r^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n r^n \\ &= r \sum_{n=1}^{+\infty} n r^{n-1} = r \sum_{n=1}^{+\infty} r^{n-1} + r \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1) r^{n-1} \\ &= \frac{r}{1-r} + r s, \end{aligned}$$

d'où le résultat, en résolvant cette équation en s . La même technique permet de montrer que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 r^n = \frac{r^2 + r}{(1-r)^3}.$$

Quand le terme général est le quotient d'un polynôme en n par $n!$, on peut toujours se ramener à la série exponentielle. Si le polynôme est $n, n(n-1), \dots$, la simplification est immédiate.

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n!} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} = e. \\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{n!} &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!} = e.\end{aligned}$$

Un polynôme en n de degré ≥ 1 peut toujours s'exprimer comme combinaison linéaire de $1, n, n(n-1), \dots$. Par exemple,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1) + n}{n!} = 2e.$$

Vous pourrez procéder de même pour calculer les sommes suivantes.

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 + 2n - 1}{n!} &= 3e. \\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3 - n^2 - n - 1}{n!} &= e.\end{aligned}$$

1.6 Vitesse de convergence

Combien faut-il ajouter de termes d'une série pour avoir une bonne approximation de sa somme ? Pour contrôler l'erreur commise en remplaçant la somme globale par une somme partielle, il faut examiner le *reste*.

Définition 4. Soit $\sum u_n$ une série convergente de somme s , et (s_n) la suite des sommes partielles. On appelle *reste à l'ordre n* la quantité

$$r_n = s - s_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

Nous allons donner quelques exemples de séries dont on peut borner le reste. Nous commençons par les séries géométriques. Soit r tel que $|r| < 1$. Rappelons que la somme de la série géométrique est :

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}.$$

Son reste à l'ordre n vaut :

$$s - s_n = \frac{1}{1-r} - \frac{1-r^{n+1}}{1-r} = \frac{r^{n+1}}{1-r} .$$

Le reste tend donc vers 0 à vitesse géométrique, ce qui est assez rapide. Par exemple, pour $r = 2$, le reste à l'ordre 20 vaut $9,5 \cdot 10^{-7}$, le reste à l'ordre 100 vaut $8 \cdot 10^{-31}$.

Examinons maintenant la série exponentielle. Pour borner son reste, considérons les deux suites (s_n) et (s'_n) définies par :

$$s_n = 1 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!} \quad \text{et} \quad s'_n = 1 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{2}{n!} .$$

La suite (s_n) est croissante et converge vers e . On vérifie facilement que la suite (s'_n) est décroissante pour $n \geq 1$. Les deux suites sont donc adjacentes et convergent vers la même limite e . On a donc :

$$r_n = e - s_n \leq s'_n - s_n = \frac{1}{n!} .$$

La convergence est beaucoup plus rapide que pour une série géométrique. Numériquement, on trouve $r_{10} = 2,7 \cdot 10^{-8}$, $r_{20} = 2 \cdot 10^{-20}$, $r_{50} = 6,6 \cdot 10^{-67}$.

Nous allons maintenant examiner des séries dont la convergence peut être beaucoup plus lente. Commençons par les séries alternées, déjà évoquées au paragraphe précédent.

Proposition 5. Soit (a_n) une suite de réels positifs, décroissante, tendant vers 0 à l'infini. Posons $u_n = (-1)^n a_n$. Le reste à l'ordre n de la série $\sum u_n$ est majoré par la valeur absolue du premier terme non sommé :

$$|r_n| \leq a_{n+1} .$$

Démonstration : Notons $s_n = u_0 + \cdots + u_n$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, posons $\alpha_k = s_{2k}$ et $\beta_k = s_{2k+1}$. Nous vérifions que (α_k) et (β_k) sont deux suites adjacentes. En effet,

$$\alpha_{k+1} - \alpha_k = -a_{2k+1} + a_{2k+2} \leq 0 \quad \text{et} \quad \beta_{k+1} - \beta_k = a_{2k+2} - a_{2k+3} \geq 0 .$$

Donc (α_k) est décroissante, et (β_k) est croissante. De plus $\alpha_k - \beta_k = a_{2k+1}$ tend vers 0. Les deux suites ont donc la même limite s . Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on aura :

$$\beta_k \leq \beta_{k+1} \leq s \leq \alpha_{k+1} \leq \alpha_k .$$

Selon que n est pair ou impair, le reste r_n peut être borné comme suit.

$$\begin{aligned} |r_{2k}| &= |s - \alpha_k| \leq \alpha_k - \beta_k = a_{2k+1} , \\ |r_{2k+1}| &= |s - \beta_k| \leq \alpha_{k+1} - \beta_k = a_{2k+2} . \end{aligned}$$

□

Pour une série alternée, la vitesse de convergence est donc dictée par la décroissance vers 0 de la suite (a_n) . Celle-ci peut être assez lente. Par exemple, la série $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge, et sa somme (pour $n \geq 1$) est $\ln(2)$. Numériquement, le reste à l'ordre 100 est $5 \cdot 10^{-3}$.

Examinons maintenant les séries dont la convergence peut être obtenue par comparaison avec une intégrale, grâce au théorème 5.

Proposition 6. *Soit f une fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$, décroissante, telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge. Soit r_n le reste à l'ordre n de la série de terme général $u_n = f(n)$. On a :*

$$r_n \leq \int_n^{+\infty} f(t) dt \leq r_{n-1} .$$

Démonstration : C'est une conséquence immédiate des inégalités suivantes, que nous avons déjà rencontrées dans la démonstration du théorème 5 (voir figure 2).

$$u_n \geq \int_n^{n+1} f(t) dt \geq u_{n+1} .$$

□

Dans ce cas, la vitesse de convergence de la série est essentiellement celle à laquelle l'intégrale de la fonction sur $[n, +\infty[$ tend vers 0. Pour les séries de Riemann $\sum n^{-\alpha}$ avec $\alpha > 1$, l'intégrale se calcule explicitement. On trouve :

$$r_n \leq \frac{1}{\alpha - 1} n^{-\alpha+1} \leq r_{n-1} .$$

Si α est assez proche de 1, la convergence peut donc être extrêmement lente. Par exemple, la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge. Sa somme (pour $n \geq 1$) est $\frac{\pi^2}{6}$. Numériquement, le reste à l'ordre 100 est proche de 10^{-2} .

2 Entraînement

2.1 Vrai ou faux

Vrai-Faux 1. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☐ Si la série $\sum u_n$ converge, alors la série $\sum u_n^2$ converge.
2. ☒ Si la série $\sum u_n$ est absolument convergente, alors la série $\sum u_n^2$ converge.
3. ☐ Si la série $\sum u_n$ converge, alors la série $\sum nu_n$ converge.
4. ☐ Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent, alors la série $\sum u_n + v_n$ diverge.
5. ☒ Si la série $\sum u_n$ converge, alors la série $\sum 1/u_n$ diverge.
6. ☐ Si la série $\sum u_n$ converge, alors la série $\sum \cos(n)u_n$ converge.
7. ☒ Si la série $\sum u_n$ est absolument convergente, alors la série $\sum \cos(n)u_n$ converge.
8. ☒ Si la série $\sum e^{in}u_n$ est absolument convergente, alors la série $\sum \cos(2n)u_n$ converge.
9. ☒ Un nombre réel $x \in [0, 1]$ dont toutes les décimales sont strictement positives est supérieur à $\frac{1}{10}(1 - \frac{1}{10})^{-1}$.
10. ☐ Un nombre réel $x \in [0, 1]$ dont toutes les décimales sont égales à 2 ou à 3 est compris entre $(1 - \frac{2}{10})^{-1}$ et $(1 - \frac{3}{10})^{-1}$.
11. ☒ Si $u_n > 0$ pour tout n et u_n est équivalent à $\frac{1}{n^2}$ quand n tend vers l'infini, alors $\sum \cos(n)u_n$ converge.
12. ☐ Si $u_n > 0$ pour tout n et u_n est équivalent à $\frac{1}{n}$ quand n tend vers l'infini, alors $\sum \cos(n)u_n$ converge.
13. ☐ Si $u_n > 0$ pour tout n et si la suite (u_n) est décroissante, alors $\sum \cos(n)u_n$ converge.
14. ☒ Si la suite (u_n) est décroissante et tend vers 0, alors $\sum \cos(n)u_n$ converge.

Vrai-Faux 2. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☐ Si $|r| \leq 1$ alors $\sum nr^n$ converge.
2. ☒ Si $|r| < 1$ alors $\sum n^2r^n$ converge.
3. ☐ Si $|r| < 1$ alors $\sum e^nr^n$ converge.
4. ☐ Si $|r| \leq 1$ alors $\sum \cos(n)r^n$ converge.
5. ☒ Si $|r| \geq 1$ alors $\sum \cos(n)r^n$ diverge.
6. ☐ Si la suite (u_n) est bornée, alors $\sum u_nr^n$ est soit absolument convergente, soit divergente.
7. ☒ Si $|r| < 1$ et si la suite (u_n) est bornée, alors $\sum u_nr^n$ converge.

Vrai-Faux 3. Les séries suivantes convergent : vrai ou faux et pourquoi ?

1. ☒ $\sum \frac{n!}{(2n)!}$
2. ☒ $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!}$
3. ☐ $\sum \frac{n! + 1}{(n+1)!}$
4. ☐ $\sum \frac{1}{(n!)^{1/n}}$
5. ☒ $\sum \frac{1}{2^n + 3^n}$
6. ☐ $\sum \frac{2^n + n}{n2^n}$
7. ☒ $\sum \frac{2^n + n}{n^2 2^n}$
8. ☐ $\sum \frac{2^n + 2}{n2^n}$

Vrai-Faux 4. Les séries suivantes convergent : vrai ou faux et pourquoi ?

1. ☐ $\sum \frac{n^2 + 1}{\ln(n)\sqrt{n^6 + 2n + 3}}$
2. ☒ $\sum \frac{n^2 + 1}{(\ln(n))^2 \sqrt{n^6 + 2n + 3}}$
3. ☐ $\sum \frac{n^2 + 1}{(\ln(n))^2 \sqrt{n^5 + 2n + 3}}$
4. ☒ $\sum \frac{(1 + \cos(n))(n^2 + 1)}{(\ln(n))^2 \sqrt{n^6 + 2n + 3}}$
5. ☒ $\sum \frac{\cos^6(n)(n^2 + 1)}{(\ln(n))^2 \sqrt{n^6 + 2n + 3}}$
6. ☐ $\sum \frac{\cos^2(n)(n^2 + 1)}{(\ln(n))\sqrt{n^6 + 2n + 3}}$
7. ☒ $\sum \frac{\cos^2(n)(\sin((n^2 + 1)^{-1}))}{(\ln(n))\sqrt{n^2 + 2n + 3}}$

Vrai-Faux 5. Les séries suivantes convergent, mais ne sont pas absolument convergentes : vrai ou faux et pourquoi ?

1. ☐ $\sum \frac{\cos^3(n)}{(\sqrt{n})^3}$
2. ☐ $\sum \frac{\cos^2(n)}{\sqrt{n}}$

3. ☒ $\sum \frac{\cos^3(n)}{\sqrt{n}}$
4. ☒ $\sum \frac{\cos^3(n)}{\sqrt{n}\sqrt[6]{n^2+n}}$
5. ☒ $\sum \frac{\cos^3(n)(n^2+1)}{n^3}$
6. ☐ $\sum \frac{\cos^3(n)(n+1)}{n^3}$

Vrai-Faux 6. Parmi les égalités suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☒ $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$
2. ☐ $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$
3. ☒ $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n-3}{n(n-1)(n-2)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-2}{n(n^2-1)}$
4. ☒ $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n} = 1$
5. ☐ $\sum_{n=2}^{+\infty} 2^{-n} = \frac{1}{4}$
6. ☒ $\sum_{n=2}^{+\infty} 3^{-n-1} = \frac{1}{18}$
7. ☒ $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e - 2$
8. ☐ $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)!} = e - \frac{3}{2}$
9. ☒ $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!} = e - 1$

Vrai-Faux 7. Parmi les égalités suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☐ $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1$
2. ☒ $\sum_{n=4}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)(n-2)} = \frac{1}{2}$

$$3. \quad \square \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4n+6}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = 1$$

$$4. \quad \boxtimes \quad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{4n+2}{(n^2-1)(n^2+2n)} = \frac{2}{3}$$

$$5. \quad \boxtimes \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+3}{(n-1)!} = 8e$$

$$6. \quad \boxtimes \quad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^2+2}{(n-1)!} = 7e - 3$$

2.2 Exercices

Exercice 1. En examinant la limite du terme général, montrer que les séries suivantes divergent.

$$\sum \sin(n) ; \quad \sum (1 + (-1)^n \cos(1/n)) ; \quad \sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^n ; \quad \sum \frac{(-1)^n}{1+n^{-1}}$$

Exercice 2. Utiliser le théorème de comparaison ou un équivalent, pour démontrer que

1. les séries suivantes convergent

$$\sum \frac{1 - \cos(\frac{1}{n \ln(n)})}{\sin(\frac{1}{n})} ; \quad \sum \sqrt{n+2} \sin\left(\frac{3}{(n+1)^2}\right) ;$$

$$\sum \left(\frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n-1}{n}\right)\right) ; \quad \sum |\sin(\pi \sqrt{n^4+1})|^{\frac{3}{4}} ;$$

$$\sum \frac{n^2}{2^n + n} ; \quad \sum e^{n^{\frac{1}{3}} - \sqrt{n}} ;$$

$$\sum \left(1 - \cos\left(\frac{n-1}{n}\right)\right) ; \quad \sum \operatorname{argcosh} \frac{n+1}{n} .$$

2. les séries suivantes divergent

$$\sum \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) ; \quad \sum \sqrt{n^2+2n} \sin\left(\frac{3}{(n+1)^2}\right) ;$$

$$\sum n^{-(1+\frac{1}{n})} ; \quad \sum \frac{1}{n + (-1)^n \sqrt{n}} ;$$

$$\sum \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2+n-1} ; \quad \sum (n^3+1)^{\frac{1}{3}} - \sqrt{n^2+1} .$$

Exercice 3. Utiliser le critère de Cauchy pour déterminer la nature des séries suivantes.

$$\sum \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n} ; \quad \sum \left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^n ;$$

$$\sum \left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{n(-1)^n} ; \quad \sum \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n^2} .$$

Exercice 4. Utiliser le critère de d'Alembert pour déterminer la nature des séries suivantes.

$$\sum \frac{n!}{n^n}; \quad \sum \frac{(\ln n)^n}{n!}; \quad \sum \frac{(3n)!}{9(n!)^3}$$

$$\sum \frac{n!}{n^{\alpha n}}; \quad \sum \frac{n^{\alpha}(\ln n)^n}{n!}; \quad \sum \frac{2^n}{n^2 \sin^{2n}(\alpha)}.$$

(discuter selon la valeur du réel α).

Exercice 5. Déterminer la nature des séries suivantes

$$\sum ne^{-n}; \quad \sum ne^{-\sqrt{n}}; \quad \sum \frac{e^n}{n^5 + 1}; \quad \sum \frac{e^{-n}}{4 + \sin n};$$

$$\sum \frac{2^n + n^2}{3^n n^2 + 1}; \quad \sum \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n + 1}; \quad \sum \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\sqrt{n + 1}}; \quad \sum n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right);$$

$$\sum \frac{1 - n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n + 1}}; \quad \sum \frac{\ln n}{n}; \quad \sum \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n; \quad \sum \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n;$$

$$\sum \frac{n!}{n^n}; \quad \sum \frac{\sin n}{n^2 + \cos^2 n}; \quad \sum \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x^2} dx; \quad \sum (\ln n)^{-n};$$

$$\sum \left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{n \ln n}; \quad \sum (e - (1 + \frac{1}{n})^n); \quad \sum n \ln(1 + \frac{1}{n}) - \cos \frac{1}{n^{1/2}}; \quad \sum \frac{(n!)^2}{(2n)!};$$

$$\sum \frac{1}{n \cdot n^{3/n}}; \quad \sum \frac{\sqrt{n(n-1)}}{n^3 - 2\sqrt{n} + 3 \ln n}; \quad \sum \frac{\sqrt{n(n - \cos(n))}}{\sqrt{n^4 - 2n^3 + 3 \sin(n)}}.$$

Exercice 6. On considère une suite (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}^+$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par l'une des formules suivantes.

- $u_{n+1} = \frac{\sin(u_n)}{n+1}$
- $u_{n+1} = \frac{\ln(1+u_n)}{2}$
- $u_{n+1} = 1 - \cos(u_n)$

1. Montrer que (u_n) tend vers 0.
2. Étudier la limite du rapport u_{n+1}/u_n .
3. En déduire que la série $\sum u_n$ est convergente.

Exercice 7. Soient a et b deux réels. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}.$$

1. Vérifier que la suite (u_n) tend vers 0 si et seulement si $a + b = -1$.
2. Déterminer a et b pour que la série $\sum u_n$ soit convergente.

Exercice 8. Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs ou nuls, convergente.

1. Montrer que pour tout $\alpha > 1$, la série $\sum u_n^\alpha$ converge.
2. Montrer que les séries $\sum \sin(u_n)$ et $\sum \arctan(u_n)$ convergent.
3. Soit f une application de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ telle que $f(0) = 0$, admettant une dérivée à droite en 0. Montrer que la série $\sum f(u_n)$ converge.

Exercice 9. Soit u_n une suite à termes réels positifs ou nuls. Montrer que les séries de termes généraux u_n , $\frac{u_n}{1+u_n}$, $\ln(1+u_n)$ et $\int_0^{u_n} \frac{dx}{1+x^3}$ sont de même nature (convergentes ou divergentes).

Exercice 10. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs ou nuls, convergentes.

1. Montrer que les séries $\sum \min\{u_n, v_n\}$ et $\sum \max\{u_n, v_n\}$ convergent.
2. Si a et b sont deux réels tels que $0 < a < b$, alors $0 < a < 2ab/(a+b) < \sqrt{ab} < b$ ($2ab/(a+b)$ et $\sqrt{ab}$ sont respectivement la moyenne harmonique et la moyenne géométrique de a et b). Montrer que $\sum \sqrt{u_n v_n}$ et $\sum \frac{u_n v_n}{u_n + v_n}$ convergent.

Exercice 11. Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries réelles convergentes et $\sum w_n$ une série réelle telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n \leq w_n \leq v_n.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq w_n - u_n \leq v_n - u_n$$

2. En déduire que $\sum w_n$ converge.

Exercice 12. Soit f la fonction définie sur $[2, \infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$. Soit pour tout $n \geq 2$, $u_n = f(n)$ et $s_n = \sum_{k=2}^n u_k$.

1. Vérifier que $F : x \mapsto \ln(\ln(x))$ est une primitive de f . En déduire les inégalités :

$$s_n \geq F(n+1) - F(2) \quad \text{et} \quad s_n - u_2 \leq F(n) - F(2)$$

2. Déduire de la question précédente que s_n est équivalent à $\ln(\ln(n))$ quand n tend vers l'infini.
3. On pose $a_n = s_n - \ln(\ln n)$. Montrer en utilisant des développements limités que la série de terme général $(a_n - a_{n-1})$ converge. En déduire que $S_n - \ln(\ln n)$ est borné.
4. Quelle est la plus petite valeur de n telle que $s_n > 10^3$?

Exercice 13. Pour tout $n \geq 1$, on note $u_n = 1/\sqrt{n}$ et

$$s_n = \sum_{k=1}^n u_k$$

1. Montrer que pour tout $n \geq 2$,

$$S_n - 1 \leq 2(\sqrt{n} - 1) \leq S_{n-1}$$

2. En déduire que S_n est équivalent à $2\sqrt{n}$ quand n tend vers l'infini.
 3. Quelle est la plus petite valeur de n telle que $s_n > 10^{-5}$?

Exercice 14. En utilisant la comparaison avec une intégrale, démontrer les résultats suivants.

$$\text{Si } \gamma \leq 1 \quad \sum_{n=3}^{+\infty} n^{-1} (\ln(n))^{-1} (\ln(\ln(n)))^{-\gamma} \text{ diverge.}$$

$$\text{Si } \gamma > 1 \quad \sum_{n=3}^{+\infty} n^{-1} (\ln(n))^{-1} (\ln(\ln(n)))^{-\gamma} \text{ converge.}$$

Exercice 15. Soit u_n une suite à termes réels (quelconques).

- Donner un exemple tel que $\sum u_n$ converge et $\sum u_n^2$ diverge. On suppose dans les questions suivantes que $\sum u_n$ et $\sum u_n^2$ convergent.
- Montrer pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\sum u_n^k$ converge.
- Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ deux fois continûment dérivable, telle que $f(0) = 0$. Montrer que $\sum f(u_n)$ converge.

Exercice 16. Soit n un entier strictement positif. On considère l'équation $x^n + nx + 1 = 0$

- Montrer que cette équation admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+$. On la note u_n .
- Montrer que la suite (u_n) tend vers 0.
- Montrer que la série $\sum u_n$ diverge.

Exercice 17. Montrer que les séries suivantes convergent, mais ne sont pas absolument convergentes

$$\begin{aligned} & \sum \frac{\sin(n)}{\sqrt{n^2 + n}} ; \quad \sum \frac{\sin^3(n)}{\sqrt{n+2}} ; \quad \sum \frac{\cos(n)}{\ln(n)} ; \\ & \sum \frac{\sin^5(n)}{\ln(\ln(n))} ; \quad \sum \frac{(-1)^n \cos(n)}{\sqrt{n}} ; \quad \sum \frac{\sin(3n) \cos(n)}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

Exercice 18. Déterminer la nature des séries suivantes.

$$\begin{aligned} & \sum \frac{(-1)^n}{\ln n} ; \quad \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} ; \quad \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right) ; \quad \sum \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n} ; \\ & \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} ; \quad \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n + (-1)^n}} ; \\ & \sum \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(x)}{x} dx ; \quad \sum \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin^2(x)}{x} dx . \end{aligned}$$

Exercice 19. Soit k un entier.

1. Montrer que $\cos^{2k}(x)$ est une combinaison linéaire de $1, \cos(2x), \dots, \cos(2kx)$. En déduire que la série $\sum \cos^{2k}(n)/n$ est divergente.
2. Montrer que $\cos^{2k+1}(x)$ est une combinaison linéaire de $\cos(x), \dots, \cos((2k+1)x)$. En déduire que la série $\sum \cos^{2k+1}(n)/n$ est convergente.

Exercice 20. Soit $\sum u_n$ une série convergente à termes complexes. Montrer que la série $\sum \frac{u_n}{n}$ converge.

Exercice 21. On considère la série $\sum u_n$, où

$$u_n = \frac{\sin(n)}{\sqrt{n} + \cos(n)}$$

1. Vérifier que la suite $(1/(\sqrt{n} + \cos(n)))$ n'est pas décroissante.
2. Montrer que la suite $(1/(n - \cos^2(n)))$ est décroissante.
3. Montrer que la suite $(\sqrt{n}/(n - \cos^2(n)))$ est décroissante.
4. Vérifier que

$$u_n = \frac{\sin(n)\sqrt{n}}{n - \cos^2(n)} - \frac{\sin(n)\cos(n)}{n - \cos^2(n)}.$$

En déduire que $\sum u_n$ converge.

Exercice 22. Soient a et b deux réels. On considère la série $\sum u_n$ avec $u_n = \frac{a^n}{n+bn}$.

1. On suppose $b \leq 1$. Pour quelles valeurs de a la série est-elle absolument convergente ?
2. Même question pour $b > 1$.
3. On suppose $a = -1$. Pour quelles valeurs de b la série est-elle convergente ?
4. Représenter dans le plan les points de coordonnées (a, b) tels que la série est absolument convergente, convergente, divergente.

Exercice 23. On considère la série de terme général u_n , où

$$u_n = \frac{1}{n(n^2 - 1)}.$$

1. Écrire la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\frac{1}{x(x^2-1)}$.
2. En déduire une expression explicite en fonction de n de

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k^2 - 1)}$$

3. Dédurre de ce qui précède la convergence de la série $\sum u_n$ et la valeur de la somme

$$s = \sum_{k=2}^{+\infty} u_k .$$

Exercice 24. On considère la série de terme général :

$$u_n = \ln \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) = \ln \left(\frac{n^2 - 1}{n^2} \right)$$

1. Démontrer que cette série converge.

2. Donner une expression explicite de $s_n = \sum_{k=2}^n u_k$.

3. En déduire la valeur de la somme $s = \sum_{k=2}^{+\infty} u_k$.

Exercice 25. Montrer que les séries suivantes convergent et calculer leurs sommes :

$$\sum_{n=3}^{+\infty} 3^{-n+2} + 2^{-n+3} ; \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (n-2)3^{-n} + (n-3)2^{-n} ;$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (n^2 - 2n)3^{-n} + (n^2 - 3n)2^{-n} ; \quad \sum_{n=0}^{+\infty} (n^2 - 2n + 3)3^{-n} + (n^2 - 3n + 2)2^{-n} ;$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 + 2n}{n!} ; \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 + 2n + 3}{(n-1)!} ; \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3 + 2n^2 + 3n}{n!} ; \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3 + 2n + 3n + 1}{n!} ;$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2n+1}{n^3 - n^2} ; \quad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{n^4 - 2n^2 + 1} ; \quad \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{2n-1}{n^3 - 4n} ; \quad \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{4n+2}{(n^2-1)(n^2-2n)} .$$

Exercice 26. Si $\sum u_n$ est une série convergente à termes strictement positifs, on note r_n son reste d'ordre n :

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k .$$

On suppose qu'il existe $k \in]0, 1[$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq k$ pour tout $n \geq n_0$. Montrer que pour tout $n \geq n_0$, $0 < r_n \leq \frac{1}{1-k} u_{n+1}$.

Exercice 27. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels. On dit que le *produit infini* $\prod a_n$ converge, s'il existe $\pi \in \mathbb{R}^*$ tel que la suite de terme général

$$\prod_{k=0}^n a_k \text{ converge vers } \pi .$$

1. Montrer que si le produit infini $\prod a_n$ converge, alors $\forall n, a_n \neq 0$ et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1.$$

On pose désormais $a_n = 1 + u_n$.

2. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n > 1$. Montrer que le produit $\prod a_n$ converge si et seulement si la série $\sum u_n$ converge.
3. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \in]0, 1]$. Montrer que le produit $\prod a_n$ converge si et seulement si la série $\sum u_n$ converge.
4. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \in]0, +\infty[$. Montrer que si la série $\sum u_n$ converge absolument, alors le produit $\prod a_n$ converge.
5. Montrer que pour tout $n \geq 2$,

$$\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n}.$$

En déduire $\prod_{n=2}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.

6. Montrer que

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) = 1$$

On pourra calculer $(1 + \frac{1}{2n})(1 - \frac{1}{2n+1})$.

7. Montrer que le produit infini

$$\prod \left|1 + \frac{i}{n}\right| \text{ converge.}$$

On pourra appliquer le résultat de la question 2.

8. Montrer que le produit infini

$$\prod \left(1 + \frac{i}{n}\right) \text{ diverge.}$$

On pourra écrire

$$\left(1 + \frac{i}{n}\right) = \left|1 + \frac{i}{n}\right| e^{i\theta_n} \text{ avec } \theta_n = \arctan\left(\frac{1}{n}\right).$$

Exercice 28. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels, telle que la série $\sum u_n$ soit convergente mais non absolument convergente. On note (p_n) la suite des termes positifs et (m_n) la suite des termes négatifs.

$$p_n = \begin{cases} u_n & \text{si } u_n > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad m_n = \begin{cases} u_n & \text{si } u_n < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que les séries $\sum p_n$ et $\sum m_n$ sont divergentes.
2. Soit a un réel quelconque. Construire une bijection σ_a de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n u_{\sigma_a(i)} = a .$$

Indication : supposant $a > 0$, prendre les premiers termes positifs dont la somme dépasse a , puis ajouter des termes négatifs jusqu'à ce que la somme repasse en-dessous de a , puis itérer.

3. Construire une bijection σ_+ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n u_{\sigma_+(i)} = +\infty .$$

4. Construire une bijection σ_- de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n u_{\sigma_-(i)} = -\infty .$$

Exercice 29. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels tels que la série $\sum u_n$ soit absolument convergente. Soit σ une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

1. Montrer que la série $\sum u_{\sigma(n)}$ est absolument convergente.
2. Montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{m=0}^{+\infty} u_m .$$

2.3 QCM

Donnez-vous une heure pour répondre à ce questionnaire. Les 10 questions sont indépendantes. Pour chaque question 5 affirmations sont proposées, parmi lesquelles 2 sont vraies et 3 sont fausses. Pour chaque question, cochez les 2 affirmations que vous pensez vraies. Chaque question pour laquelle les 2 affirmations vraies sont cochées rapporte 2 points.

Question 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit u_n un réel strictement positif.

- ☐ A Si la suite (u_n) tend vers 0, alors la série $\sum u_n$ converge.
- ☐ B Si la série $\sum u_n$ diverge, alors la série $\sum u_n^2$ diverge.
- ☐ C Si la série $\sum u_n$ diverge, alors la suite (u_n) ne tend pas vers 0.
- ☐ D Si la série $\sum u_n$ converge, alors la suite (u_n^2) tend vers 0.
- ☐ E Si la série $\sum u_n$ converge, alors la série $\sum u_n^2$ converge.

Question 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit u_n un réel strictement positif.

- ☐ A Si la série $\sum u_n$ converge, alors la série $\sum \sin(u_n)$ converge.

- ☐ B Si la série $\sum u_n$ diverge, alors la série $\sum(\cos(u_n) - 1)$ diverge.
- ☐ C Si la série $\sum u_n$ diverge, alors la série $\sum u_n/n$ diverge.
- ☐ D Si la série $\sum u_n$ diverge, alors la série $\sum \tan(u_n)$ diverge.
- ☐ E Si la série $\sum u_n$ converge, alors la série $\sum e^{u_n}$ converge.

Question 3. Soit r et α deux réels strictement positifs.

- ☐ A Si $r \leq 1$ alors la série $\sum r^n$ converge.
- ☐ B Si $r < 1$, alors la série $\sum n^\alpha r^n$ converge.
- ☐ C Si $r = 1$, alors la série $\sum n^\alpha r^n$ diverge.
- ☐ D Si $r \leq 1$ et si $\alpha < -1$, alors la série $\sum n^\alpha r^n$ converge.
- ☐ E Si $r < 1$ et si $\alpha > 1$, alors la série $\sum n^\alpha r^n$ diverge.

Question 4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit u_n un réel positif ou nul.

- ☐ A Si la suite $(\sqrt[n]{u_n})$ tend vers $1/2$, alors la série $\sum nu_n$ converge.
- ☐ B Si la suite $(\sqrt[n]{u_n})$ tend vers 1 , alors la série $\sum u_n$ converge
- ☐ C Si la suite $(\sqrt[n]{u_n})$ tend vers 2 , alors la série $\sum u_n/n$ diverge
- ☐ D Si la suite $(\sqrt[n]{u_n})$ est majorée par 1 , alors la série $\sum u_n$ converge
- ☐ E Si la suite $(\sqrt[n]{u_n})$ converge, alors la suite (u_n) converge.

Question 5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit u_n un nombre complexe non nul.

- ☐ A Si la suite $(|\frac{u_{n+1}}{u_n}|)$ tend vers 1 alors la série $\sum u_n$ converge.
- ☐ B Si la suite $(|\frac{u_{n+1}}{u_n}|)$ est minorée par 1 alors la série $\sum u_n$ converge.
- ☐ C Si la suite $(|\frac{u_{n+1}}{u_n}|)$ est majorée par 1 alors la série $\sum u_n/n^2$ converge.
- ☐ D Si la suite $(|\frac{u_{n+1}}{u_n}|)$ tend vers $1/2$ alors la série $\sum n^2|u_n|$ converge.
- ☐ E Si la suite $(|\frac{u_{n+1}}{u_n}|)$ tend vers 2 alors la série $\sum u_n/n^2$ converge.

Question 6. La série proposée converge.

- ☐ A $\sum \ln(1 + \sin(1/n))$
- ☐ B $\sum \sqrt{\ln(1 + \sin(1/n^2))}$
- ☐ C $\sum \sqrt{(1 + \sin(1/n^4))}$
- ☐ D $\sum \sqrt{\ln(1 + \sin(1/n^4))}$
- ☐ E $\sum \ln(\sqrt{1 + \sin(1/n^2)})$

Question 7. Le critère de convergence des séries alternées permet d'affirmer que la série proposée converge.

- ☐ A $\sum \frac{1}{\ln(n) + (-1)^n}$
- ☐ B $\sum \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n}$
- ☐ C $\sum \frac{(-1)^n}{n \sin^2(n)}$

☐ D $\sum \frac{(-1)^n}{n \ln(n)}$

☐ E $\sum \frac{(-1)^n}{n \arctan(n)}$

Question 8. L'égalité proposée est vraie.

☐ A $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(2n-3)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)(2n+1)}$

☐ B $1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(2n-3)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(2n-1)}$

☐ C $1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(2n-3)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(2n-1)}$

☐ D $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n(2n-3)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)(2n+1)}$

☐ E $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(2n-3)} = \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)(2n-1)}$

Question 9. L'égalité proposée est vraie.

☐ A $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2} = 1$

☐ B $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

☐ C $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$

☐ D $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{3} = \frac{3}{4}$

☐ E $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$

Question 10. L'égalité proposée est vraie.

☐ A $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} = e$

☐ B $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!} = e - 1$

☐ C $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+2}{n!} = 2e - 1$

☐ D $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n!} = 2e$

☐ E $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{(n-1)!} = 2e - 1$

Réponses : 1-DE 2-AD 3-BD 4-AC 5-CD 6-DE 7-DE 8-AB 9-AC 10-BD

2.4 Devoir

Essayez de bien rédiger vos réponses, sans vous reporter ni au cours, ni au corrigé. Si vous souhaitez vous évaluer, donnez-vous deux heures ; puis comparez vos réponses avec le corrigé et comptez un point pour chaque question à laquelle vous aurez correctement répondu.

Questions de cours : Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries et n_0 un entier tel que pour tout $n \geq n_0$, $0 \leq u_n \leq v_n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$s_n = \sum_{k=0}^n u_k \quad \text{et} \quad t_n = \sum_{k=0}^n v_k .$$

1. Montrer que les suites (s_n) et (t_n) sont croissantes à partir de n_0 , et qu'il existe un réel a tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n \leq t_n + a$.
2. En déduire que si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge et si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.
3. On suppose que u_n est équivalent à v_n quand n tend vers l'infini. Démontrer que $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum v_n$ converge.
4. On suppose qu'il existe $r < 1$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} \leq r u_n$. Montrer que la série $\sum u_n$ converge.
5. On suppose que $\sum u_n$ diverge. Démontrer que la série de terme général $(-1)^n / s_n$ converge.

Exercice 1 : Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs. On suppose qu'il existe $a > 0$ et $b > 1$ tels que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{a}{n} + O\left(\frac{1}{n^b}\right) .$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = n^a u_n$. Démontrer que

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = 1 + O\left(\frac{1}{n^c}\right) ,$$

où $c = \min\{b, 2\}$.

2. En déduire que la série de terme général $\ln(v_{n+1}/v_n)$ converge.
3. En déduire que la suite (v_n) converge.
4. Utiliser le résultat précédent pour démontrer que si $a \leq 1$, alors $\sum u_n$ diverge, et si $a > 1$ alors $\sum u_n$ converge. (Vous venez de justifier la *règle de Raabe-Duhamel*).

Exercice 2 : On considère la *série harmonique*, de terme général $u_n = 1/n$. On note h_n ses sommes partielles, définies pour $n \geq 1$ par :

$$h_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} .$$

1. Démontrer que pour tout $k \geq 2$,

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq u_k \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{t} dt .$$

2. En déduire que pour tout $n \geq 1$,

$$\ln(n+1) \leq h_n \leq \ln(n) + 1 .$$

3. En déduire que $\sum u_n$ diverge et que h_n est équivalent à $\ln(n)$ quand n tend vers l'infini.

4. Pour tout $n \geq 1$, on pose

$$\delta_n = u_n - \int_n^{n+1} \frac{1}{t} dt .$$

Montrer que $0 \leq \delta_n \leq u_n - u_{n+1}$. En déduire que la série $\sum \delta_n$ converge.

5. En déduire qu'il existe un réel strictement positif γ tel que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n - \ln(n) = \gamma .$$

($\gamma \simeq 0.577215665$ est la *constante d'Euler*.)

6. Pour tout $n \geq 1$, on pose $v_n = (-1)^{n-1} u_n = (-1)^{n-1}/n$. Montrer que la série $\sum v_n$ converge.
7. Vérifier que pour tout $k \geq 1$, $1/k = \int_0^1 t^{k-1} dt$. En déduire l'expression suivante des sommes partielles.

$$s_n = \sum_{k=1}^n v_k = \int_0^1 \frac{1 - (-t)^n}{1+t} dt .$$

8. Montrer que pour tout $n \geq 1$

$$\left| s_n - \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt \right| \leq \frac{1}{n+1} .$$

9. En déduire que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} v_k = \ln(2) .$$

10. Quelle est la plus petite valeur de n telle que $|r_n| = |s_n - \ln(2)| < 10^{-3}$?
11. Démontrer l'égalité $s_{2n} = h_{2n} - h_n$. Retrouver la limite de (s_n) en utilisant le résultat de la question 5.

2.5 Corrigé du devoir

Questions de cours :

1. Pour tout $n \geq n_0$:

$$s_{n+1} - s_n = u_n \geq 0 \quad \text{et} \quad t_{n+1} - t_n = v_n \geq 0$$

Donc les suites (s_n) et (t_n) sont croissantes à partir de n_0 . De plus,

$$s_n - s_{n_0} = u_{n_0+1} + \cdots + u_n \leq v_{n_0+1} + \cdots + v_n = t_n - t_{n_0}.$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$s_n \leq t_n + \max\{s_k - t_k, k = 0, \dots, n_0\}.$$

2. Une suite croissante converge vers une limite finie si et seulement si elle est majorée. La série $\sum v_n$ converge si et seulement si la suite (t_n) converge. Supposons que ce soit le cas, et notons t la limite. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, s_n est majorée par $t + a$, donc (s_n) converge, donc $\sum u_n$ converge. Si $\sum u_n$ diverge, alors la suite (s_n) tend vers $+\infty$. Comme $t_n \geq s_n + a$, il en est de même de la suite (t_n) , donc $\sum v_n$ diverge.
3. Par hypothèse, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $|u_n - v_n| \leq \varepsilon v_n$. Fixons $\varepsilon = 1/2$: pour tout $n \geq n_0$

$$\frac{1}{2}v_n \leq u_n \leq \frac{3}{2}v_n.$$

Par linéarité, la convergence de la suite (t_n) équivaut aux convergences des suites $(\frac{1}{2}t_n)$ et $(\frac{3}{2}t_n)$. En appliquant ce qui précède :

$$\sum v_n \text{ converge} \implies \sum \frac{3}{2}v_n \text{ converge} \implies \sum u_n \text{ converge},$$

et

$$\sum v_n \text{ diverge} \implies \sum \frac{1}{2}v_n \text{ diverge} \implies \sum u_n \text{ diverge}.$$

4. Montrons par récurrence que pour tout $n \geq n_0$, $u_n \leq u_{n_0}r^{n-n_0}$. C'est vrai pour $n = n_0$. Supposons que ce soit vrai pour n , alors :

$$u_{n+1} \leq r u_n \leq r (u_{n_0}r^{n-n_0}) = u_{n_0}r^{n+1-n_0},$$

d'où le résultat. Pour $0 < r < 1$, la série $\sum r^n$ converge. Par linéarité, il en est de même de la série $\sum v_n$, avec $v_n = (u_{n_0}r^{-n_0})r^n$. Or pour tout $n \geq n_0$, $0 \leq u_n \leq v_n$. Donc $\sum u_n$ converge, en appliquant le résultat de la question 2.

5. La suite (s_n) est croissante à partir de n_0 . Si $\sum u_n$ diverge, alors la suite (s_n) tend vers $+\infty$. Elle est donc non nulle à partir d'un certain rang n_1 . Posons $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$. À partir du rang n_2 , la suite $(1/s_n)$ est définie, décroissante, et elle tend vers 0. Donc la série de terme général $(-1)^n/s_n$ converge, par application du critère de convergence des séries alternées (théorème d'Abel).

Exercice 1 :

1. Calculons un développement limité du rapport v_{n+1}/v_n .

$$\begin{aligned} \frac{v_{n+1}}{v_n} &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^a \frac{u_{n+1}}{u_n} \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^a \left(1 - \frac{a}{n} + O\left(\frac{1}{n^b}\right)\right) \\ &= \left(1 + \frac{a}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \left(1 - \frac{a}{n} + O\left(\frac{1}{n^b}\right)\right) \\ &= 1 + O\left(\frac{1}{n^c}\right), \end{aligned}$$

où $c = \min\{b, 2\}$.

2. Par composition du développement limité de la question précédente avec la fonction $\ln$, on obtient :

$$\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) = O\left(\frac{1}{n^c}\right),$$

donc il existe une constante C et un entier n_0 tel que pour tout $n > n_0$,

$$\left|\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)\right| \leq \frac{C}{n^c},$$

Comme $c \geq b > 1$, la série de terme général C/n^c converge. Donc la série de terme général $\ln(v_{n+1}/v_n)$ converge.

3. Les sommes partielles de la série de terme général $\ln(v_{n+1}/v_n)$ sont « télescopiques » :

$$\sum_{k=0}^n \ln\left(\frac{v_{k+1}}{v_k}\right) = \sum_{k=0}^n \ln(v_{k+1}) - \ln(v_k) = \ln(v_{n+1}) - \ln(v_0).$$

Puisque la série de terme général $\ln(v_{n+1}/v_n)$ converge, la suite de ses sommes partielles, et donc la suite $(\ln(v_n))$ convergent. Par composition avec la fonction $\exp$, la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

4. Notons d la limite de la suite (v_n) . Comme $v_n = n^a u_n$, u_n est équivalent à $d n^{-a}$. Si $a \leq 1$ la série $\sum d n^{-a}$ diverge, donc $\sum u_n$ diverge. Si $a > 1$ la série $\sum d n^{-a}$ converge, donc $\sum u_n$ converge.

Exercice 2 : On considère la *série harmonique*, de terme général $u_n = 1/n$. On note h_n ses sommes partielles, définies pour $n \geq 1$ par :

$$h_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

1. La fonction $t \mapsto 1/t$ est décroissante sur $[1, +\infty[$. Pour tout $k \geq 1$,

$$\forall t \in [k, k+1], \quad \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}.$$

Donc

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dt,$$

ou encore

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k}.$$

Pour tout $k \geq 2$, on applique l'inégalité de gauche à $k-1$:

$$\frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{t} dt.$$

On obtient donc la double inégalité :

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq u_k \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{t} dt.$$

2. Sommons l'inégalité de gauche pour k allant de 1 à n :

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{t} dt \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k},$$

donc $\ln(n+1) \leq h_n$.

Sommons ensuite la seconde inégalité, pour k allant de 2 à n :

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leq \int_1^n \frac{1}{t} dt,$$

donc $h_n - 1 \leq \ln(n)$.

3. La suite $(\ln(n))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, il en est de même pour la suite des sommes partielles (h_n) . Donc la série $\sum u_n$ diverge. De plus

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \leq \frac{h_n}{\ln(n)} \leq \frac{\ln(n)+1}{\ln(n)}.$$

Or

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n) + \ln(1 + \frac{1}{n})}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln(1 + \frac{1}{n})}{\ln(n)}.$$

La suite $(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)})$ tend vers 1. Comme

$$\frac{\ln(n) + 1}{\ln(n)} = 1 + \frac{1}{\ln n} ,$$

la suite $(\frac{\ln(n)+1}{\ln(n)})$ tend également vers 1. La suite $(\frac{h_n}{\ln(n)})$ est encadrée par deux suites qui convergent vers 1, donc elle converge aussi vers 1 : h_n est équivalent à $\ln(n)$ quand n tend vers l'infini.

4. Le résultat découle de l'encadrement suivant, déjà démontré dans la question 1.

$$u_{n+1} = \frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{n} = u_n .$$

On en déduit :

$$\delta_n = u_n - \int_n^{n+1} \frac{1}{t} dt \geq 0 \quad \text{et} \quad \delta_n = u_n - \int_n^{n+1} \frac{1}{t} dt \leq u_n - u_{n+1}$$

La série $\sum u_n - u_{n+1}$ a des sommes partielles « télescopiques » :

$$\sum_{k=1}^n u_n - u_{k+1} = u_1 - u_{n+1} .$$

Comme la suite (u_n) tend vers 0, la série $\sum u_n - u_{n+1}$ converge. Donc la série $\sum \delta_n$ converge, par le théorème de comparaison.

5. Calculons les sommes partielles des δ_n .

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \delta_k &= \sum_{k=1}^n u_k - \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \\ &= h_n - \int_1^{n+1} \frac{1}{y} dy \\ &= h_n - \ln(n+1) \\ &= (h_n - \ln(n)) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= h_n - \ln(n) + O\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

Puisque la suite des sommes partielles des δ_n converge, il en est de même pour la suite $(h_n - \ln(n))$. Notons γ la somme de la série de terme général δ_n :

$$\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} \delta_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \delta_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} h_n - \ln(n) .$$

6. La série $\sum v_n$ est une série alternée. Pour lui appliquer le critère de convergence des séries alternées, il suffit d'observer que la suite $(1/n)$ est décroissante et tend vers 0.

7. Pour tout $k \geq 1$,

$$\int_0^1 t^{k-1} dt = \left[\frac{t^k}{k} \right]_0^1 = \frac{1}{k}.$$

En sommant de 1 à n , on obtient :

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{1}{k} \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \int_0^1 t^{k-1} dt \\ &= \int_0^1 \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} t^{k-1} dt \\ &= \int_0^1 \frac{1 - (-t)^n}{1+t} dt. \end{aligned}$$

8. Reprenons l'identité de la question précédente :

$$s_n = \int_0^1 \frac{1 - (-t)^n}{1+t} dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt.$$

Or :

$$\int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \leq \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}.$$

Donc :

$$\left| s_n - \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt \right| = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \leq \frac{1}{n+1}.$$

9. On a :

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t} dt = \ln(2).$$

L'inégalité de la question précédente montre que $|s_n - \ln(2)|$ tend vers 0. La suite des sommes partielles (s_n) converge donc vers $\ln(2)$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \ln(2).$$

10. La majoration de la question 8 montre que $r_n < 10^{-3}$ pour $n > 1000$. Le calcul numérique montre que le premier rang tel que $|r_n| < 10^{-3}$ est $n = 500$.

11. Écrivons :

$$\begin{aligned}s_{2n} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \\&= \left(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) \\&= \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) \\&= \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) - \frac{2}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \\&= h_{2n} - h_n\end{aligned}$$

D'après la question 5, $h_n - \ln(n)$ converge vers γ , il en est donc de même de $h_{2n} - \ln(2n)$. Donc :

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} s_{2n} \\&= \lim_{n \rightarrow +\infty} h_{2n} - h_n \\&= \lim_{n \rightarrow +\infty} (h_{2n} - \ln(2n)) + \ln(2) - (\ln(n) - h_n) \\&= \gamma + \ln(2) - \gamma = \ln(2)\end{aligned}$$

3 Compléments

3.1 De Zénon d'Élée à von Neumann

Qu'une somme de termes en nombre infini puisse donner un résultat fini intrigue depuis longtemps, au moins depuis Zénon d'Élée (v. 480–420 av. J.C.). Ses textes originaux ne nous sont pas parvenus, mais nous connaissons quelques uns de ses fameux paradoxes, par la discussion qu'en fait Aristote (384–322 av. J.C.) dans sa *Physique*, « le livre fondamental de la philosophie occidentale » selon Heidegger. Voici comment Aristote énonce le paradoxe « de dichotomie »

Si sur une grandeur d , on prend la moitié, puis la moitié de la moitié puis encore la moitié du reste, et ainsi de suite sans limitation de divisions, la grandeur obtenue en additionnant une moitié de chaque division successive (division appelée dichotomie) ne pourra jamais être égale exactement à la distance d . Avant d'arriver à son but, un mobile doit arriver à la moitié de son parcours. Mais auparavant, il doit arriver à la moitié de la moitié... Le mobile doit parcourir une quantité infinie d'unités d'espace. Il n'arrivera donc jamais à son but.

Pour autant, vous n'avez pas été choqués d'apprendre que

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}.$$

Voici maintenant comment Aristote énonce le « paradoxe d'Achille et de la tortue¹ ».

Le plus lent ne sera jamais rattrapé à la course par le plus rapide ; car il est nécessaire que le poursuivant gagne d'abord le point d'où a pris son départ le poursuivi, en sorte qu'il est nécessaire que le plus lent, à chaque fois, ait quelque avance.

Il n'est question ni d'Achille ni de tortue. Achille était probablement présent dans la version originale, par référence au passage suivant de l'Iliade d'Homère.

Ainsi qu'un homme dans un rêve n'arrive pas à poursuivre un fuyard et que celui-ci à son tour ne peut pas plus le fuir, que l'autre le poursuivre ; ainsi Achille en ce jour n'arrive pas plus à atteindre Hector à la course, qu'Hector à lui échapper.

Selon Aristote, « parcourir l'infini est impossible » : voyons cela. Disons que l'avance d'Hector (qui n'est devenu officiellement tortue qu'un bon millénaire après Zénon) est de 1 km, que sa vitesse en km/h est v , alors que la vitesse du « bouillant Achille » est $V > v$. Il y a deux manières de calculer. La plus simple est d'égaliser Vt et $vt + 1$ pour trouver l'instant du contact : $1/(V - v)$. La manière compliquée est celle du paradoxe : à l'instant $1/V$, Achille est arrivé au point de départ d'Hector, mais Hector est v/V

1. L. Cornaz : l'écriture ou le tragique de la transmission, *l'Harmattan, Paris (1994)*

plus loin. Il faut v/V^2 à Achille pour le rejoindre, mais il est déjà v^2/V^2 km plus loin, etc. L'instant de contact est donc :

$$\frac{1}{V} + \frac{v}{V^2} + \frac{v^2}{V^3} + \cdots = \frac{1}{V} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{v}{V}\right)^n = \frac{1}{V} \frac{1}{1 - \frac{v}{V}} = \frac{1}{V - v}.$$

Voici la même énigme, proposée en juin 1760 dans le volume 29 du « London magazine, or gentleman's intelligencer ». Achille s'est changé en oie et la tortue en grenouille.

Suppose a goose and a frog to start for a wager. Let the goose give the frog one mile start ; and let the goose be supposed to run ten times as fast as the frog. When will the goose overtake the frog ? I answer, if mathematics are built on a solid foundation, the goose will *never* overtake the frog ; which I prove thus :— While the goose is running the mile that he has given the frog start, the frog will have run $\frac{1}{10}$ of a mile beyond ; and while the goose runs this $\frac{1}{10}$ of a mile, the frog will have run $\frac{1}{100}$ part of a mile. While the goose is running this $\frac{1}{100}$ part of a mile, the frog must have kept his lead $\frac{1}{1000}$ part of a mile ; and thus forward $\frac{1}{10000}$, $\frac{1}{100000}$, $\frac{1}{1000000}$, etc. in infinitum. Thus I prove, from strict mathematical demonstration that the goose would, in this case, *never* overtake the frog ; — yet I know, from experience, that the goose would really overtake the frog in a small space of running. Do mathematics then contradict facts, which is the touchstone of all science ?

Les mathématiciens, anglais en particulier, manipulaient déjà les séries infinies depuis un bon siècle. Le mois suivant, la réponse est publiée.

The human mind, being finite, cannot comprehend infinity ; and so a solution to the query concerning the Goose and the Frog cannot be given in the manner requested by your correspondent.

[...]

An hour is equal to 59', 59'', 59''' etc. ad infinitum. If, therefore, a body, that by an equable motion would require an hour to run over a certain space, were to move so much thereof as would require 59', and then as much as would require 59'', and then so much more as would require 59''', etc., reason can no other way account for the completion of the hour's journey, by that body, than by considering its motion in another light than as being made up of an infinite series. *In fine*, when any thing is proposed for a solution, that is within the reach of our finite capacity, then Mathematicks, noble, unerring, universally-useful Mathematicks, lend their amicable and infallible assistance towards a solution thereof.

Puisque vous voilà disposés à profiter de l'« amicable and infallible assistance » des mathématiques, voici une version moderne du même casse-tête.

Un train part de la ville A à 60 km/h pour se rendre à la ville B, distante de 120 km, et en même temps un train part de B vers A à la même vitesse.

Toujours au même instant, une mouche décolle du pare-brise du train A en direction de B, à une vitesse double de celle des trains ; lorsque la mouche rencontre le train B elle fait instantanément demi-tour, puis de même lorsqu'elle rencontre à nouveau le train A et ainsi de suite. Sachant que les deux trains circulent sur la même voie, quelle distance aura parcouru la mouche avant de périr dans l'accident final ?

Là encore deux manières de calculer. La simple : les trains roulent pendant une heure, la mouche vole pendant le même temps, elle parcourt donc 120 km. Et puis la compliquée : quelle distance la mouche parcourt-elle pour rejoindre le train qui roule en sens inverse, puis quelle distance parcourt-elle dans son trajet de retour... Sommez la série, vous devez trouver la même chose.

Voici ce que raconte McRae dans sa biographie de von Neumann (1903–1957)². Les trains sont des bicyclettes, ce qui permet à la pauvre mouche, si elle n'échappe pas à son destin funeste, de voler à une vitesse plus raisonnable.

When he was given a problem while standing, Johnny at one stage would dance from foot to foot. Although this practice caused some spills at his crowded cocktail parties, it forms one of the first stories half against him : his reaction to the fly puzzle. Two cyclists are 20 miles apart and head toward each other at 10 miles per hour each. At the same time a fly traveling at a steady 15 miles per hour starts from the front wheel of the northbound bicycle. It lands on the frontwheel of the southbound bicycle, and then instantly turns around and flies back, and after next landing instantly flies north again. Question : What total distance did the fly cover before it was crushed between the two front wheels ?

The slow way of answering is to calculate the distance that the fly travels on its first trip to the southbound front wheel, then the distance it travels on its next trip to the northbound wheel, and finally to sum the infinite series so obtained. It is extraordinary how many mathematicians can be fooled into doing that long sum. The short way is to note that the bicycles will meet exactly one hour after starting, by which time the 15-miles-per-hour fly must have covered 15 miles. When the question was put to Johnny, he danced and answered immediately, "15 miles". "Oh, you've heard the trick before" said the disappointed questioner. "What trick ?" asked the puzzled Johnny. "I simply summed the infinite series." It is worth adding that, when ribbed on this later, Johnny said "the figures actually put to me were not so simple".

L'anecdote est plaisante, mais un peu difficile à croire, s'agissant du « most scintillating intellect of the century » (selon Peter Lax).

2. N. McRae : John von Neumann, the scientific genius who pioneered the modern computer, game theory, nuclear deterrence, and much more *American Mathematical Society* (1992)

3.2 Le théorème de Merton

Non, Merton n'est pas un de ces illustres inconnus dont nous vous abreuvons à longueur de compléments, mais un collègue d'Oxford, ayant accueilli au XIV^e siècle quatre mathématiciens-physiciens-philosophes, restés dans l'histoire sous le nom de « Calculateurs d'Oxford ». Leurs noms ? Thomas Bradwardine, William Heytesbury, Richard Swineshead, John Dumbleton, mais personne n'en est sûr. On ignore presque tout de leurs vies et de leurs carrières, sauf qu'ils ont écrit, à peu près à la même période (1330–1350), plusieurs traités de cinématique dans la droite ligne d'Aristote³. Ces traités contiennent un énoncé nouveau et intéressant : le « théorème de la vitesse moyenne ». Il concerne un mouvement *uniformément accéléré*, dont la vitesse est fonction affine du temps : $v(t) = at + b$. Le théorème dit que la distance atteinte au temps T est la même que si le mouvement s'était effectué à vitesse constante, égale à la vitesse atteinte au temps $\frac{T}{2}$, soit la moyenne des vitesses initiale et finale.

Démonstration :

$$x(t) = \int_0^T v(t) dt = \int_0^T (at + b) dt = a\frac{T^2}{2} + bT = \left(a\frac{T}{2} + b\right) T = v\left(\frac{T}{2}\right) T.$$

□

Pas de quoi s'émerveiller direz-vous ? Ceci se passait bien longtemps avant que les mathématiques soient écrites de manière algébrique, et encore plus longtemps avant les primitives. Le mouvement uniformément accéléré était déjà présent à titre d'exemple chez Aristote, et les calculateurs d'Oxford ne faisaient que suivre sa tradition des « expériences de pensée ». Mais voici ce qu'en disait un savant espagnol, Domingo de Soto, en 1555 :

Cette sorte de mouvement appartient en propre aux choses qui se meuvent naturellement et aux projectiles. Car lorsqu'un corps tombe dans un milieu homogène, il se déplace plus rapidement à la fin qu'au début. D'un autre côté, le mouvement des projectiles vers le haut est moins rapide à la fin qu'au début. De sorte que le premier croît uniformément, tandis que le second décroît uniformément.

Eh oui : le « théorème de Merton » décrivait la loi de la chute des corps... , publiée par Galilée presque 3 siècles après les calculateurs d'Oxford, et qui lui est attribuée depuis. Voici comment Galilée l'énonce en 1632.

Le temps dans lequel une certaine distance est parcourue par un mobile uniformément accéléré à partir du repos est égal au temps dans lequel la même distance serait parcourue par le même corps voyageant avec une vitesse uniforme, égale à la moitié de la vitesse maximale finale du mouvement uniformément accéléré original.

3. M. Clagett : The Science of Mechanics in the Middle Ages, U. Wisconsin Press, Madison WI, 1959

Parmi les calculateurs d'Oxford, Richard Swineshead, dont le nom avait été déformé en Suiseth, ou Suisset, a suscité l'admiration de ses successeurs. Cardan l'avait classé parmi les 10 plus grands esprits de tous les temps. Leibniz, qui s'était procuré une copie de son manuscrit, écrivait en 1714 : « Il y a eu autrefois un Suisse, qui avoit mathématisé dans la Scholastique : ses ouvrages sont peu connus ; mais ce que j'en ai vu m'a paru profond et considérable ». Qu'y avait-il de si profond dans le *liber calculationum* de Swineshead ? Entre autres plusieurs démonstrations du théorème de Merton. Dans l'une d'elles, l'étape principale consiste à montrer que pour un mouvement uniformément décéléré jusqu'à l'arrêt complet, la distance parcourue pendant la première moitié du temps est le triple de la distance parcourue dans la seconde moitié. Voici ce que dit Swineshead.

Pour cela, supposons que a décélère uniformément jusqu'à zéro. Alors dans chacun des instants de la première partie proportionnelle du temps, il ira deux fois plus vite que dans la partie correspondante de la seconde partie, et ainsi de suite pour les parties suivantes, comme il est évident. Comme la première partie proportionnelle du temps est le double de la seconde, il est évident que a parcoura quatre fois plus de distance dans la première que dans la seconde, dans la seconde que dans la troisième, et ainsi jusqu'à l'infini.

En notations modernes, soit T la durée (inconnue) du trajet. L'intervalle $[0, T]$ est subdivisé en $[0, \frac{T}{2}]$, $[\frac{T}{2}, \frac{3T}{4}]$, $[\frac{3T}{4}, \frac{7T}{8}]$, etc. Pour $n \in \mathbb{N}^*$; Notons I_n l'intervalle

$$I_n = \left] \frac{(2^n - 1)T}{2^n}, \frac{(2^{n+1} - 1)T}{2^{n+1}} \right] .$$

À I_n faisons correspondre l'intervalle I_{n+1} , qui est de longueur moitié : nous mettons ainsi en correspondance chaque intervalle de la subdivision de $[0, T]$ avec un intervalle de subdivision de $[\frac{T}{2}, T]$. Les vitesses étant proportionnelles aux instants, les vitesses dans I_{n+1} seront la moitié des vitesses dans I_n , donc la distance parcourue dans I_{n+1} sera le quart de la distance parcourue dans I_n . Vient alors l'argument de sommation :

La conséquence découle du fait que si deux ensembles de quantités sont comparés terme à terme de sorte que chaque comparaison donne la même proportion, alors, si la somme du premier ensemble est comparée avec la somme des termes du second ensemble, les sommes auront la même proportion que celle des comparaisons terme à terme des deux ensembles.

Traduisez :

$$(\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda v_n) \implies \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right) .$$

Et Swineshead conclut :

Il s'ensuit donc que dans l'intervalle de temps complet, a parcourra quatre fois plus d'espace que dans la seconde moitié du temps. Donc dans la pre-

mière moitié du temps, il traversera trois fois autant d'espace que dans la seconde moitié.

Vous vous demandez pourquoi avoir eu recours à une sommation de série, alors qu'il suffisait d'appliquer l'argument à la deuxième moitié (un quart de la distance totale parcourue, puisque la durée et la vitesse sont la moitié) ? Moi aussi. Peut-être par fidélité à Aristote et son paradoxe de dichotomie. En tout cas, le même genre d'argument lui permettait d'aller encore plus loin.

Si un point se meut à une vitesse constante durant la première moitié d'un intervalle de temps, durant le quart suivant de l'intervalle de temps à une vitesse double de la vitesse initiale, durant le huitième suivant de l'intervalle à une vitesse triple, etc. ad infinitum ; alors la vitesse moyenne durant l'intervalle de temps total sera le double de la vitesse initiale.

En d'autres termes :

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \cdots + \frac{n}{2^n} + \cdots = 2.$$

C'est la première somme de série non géométrique de l'histoire. Comment Swineshead s'y prenait-il ? Doubler la vitesse sur la seconde moitié revient à la doubler sur la première. La tripler en plus sur le dernier quart de l'intervalle, a le même effet sur la vitesse moyenne que la doubler partout, sauf sur le dernier quart. La quadrupler en plus sur le dernier huitième a le même effet que la doubler partout, sauf sur le dernier huitième, etc. (figure 3). En écriture mathématique :

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \cdots + \frac{n}{2^n} + \frac{n+1}{2^n} = 2 \left(1 - \frac{1}{2^n} \right).$$

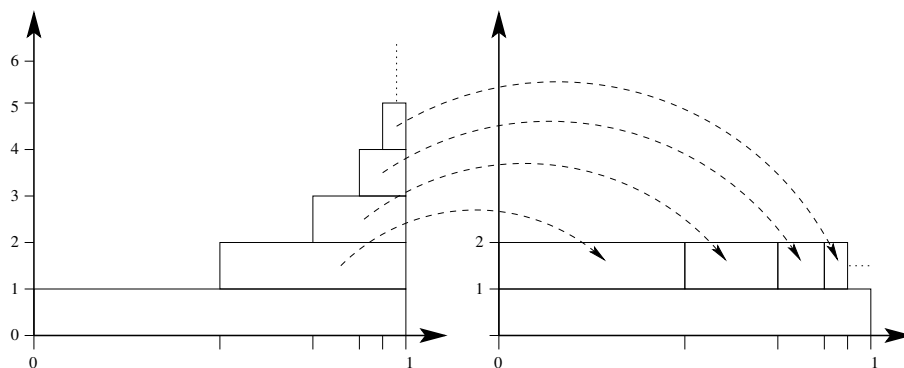


FIGURE 3 – Argument de Swineshead pour la somme de la série $\sum n2^{-n}$.

3.3 La série harmonique

Nous vous avons proposé plusieurs démonstrations du fait que la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge. Voici la toute première en date, celle de Nicolas Oresme (1325–1382)⁴. Son idée consiste à regrouper les termes par blocs en doublant la taille des blocs à chaque fois :

$$1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{1+2^{k-1}} + \cdots + \frac{1}{2^k}\right) + \cdots$$

Le k -ième bloc contient 2^{k-1} termes, chacun au moins égal à 2^{-k} : la somme de ces termes est donc supérieure à $1/2$. Oresme conclut « il y a ici une infinité de parties dont chacune sera plus grande que la moitié d'un pied, donc le tout sera infini ». Pas mal pour l'époque ! D'autant qu'il est aussi le premier à avoir énoncé en toute généralité la somme de la série géométrique. Mais au XIV^e siècle, le but était moins mathématique que philosophique : les séries étaient encore un objet de méditation sur l'infini, dans la lignée du traitement par Aristote des paradoxes de Zénon.

Il faudra attendre trois siècles, l'invention des logarithmes et du calcul intégral pour voir les séries se développer comme sujet mathématique. La seconde démonstration de la divergence de la série harmonique est celle du prêtre italien Pietro Mengoli (1626–1686). Lui regroupe les termes trois par trois, en observant que pour tout $n \geq 2$:

$$\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} > \frac{3}{n}.$$

Il en déduit que :

$$1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{3k-1} + \frac{1}{3k} + \frac{1}{3k+1}\right) + \cdots$$

est strictement supérieur à

$$1 + \frac{3}{3} + \frac{3}{6} + \frac{3}{9} + \cdots + \frac{3}{3k} + \cdots$$

Si la série harmonique avait une somme s finie, celle-ci devrait être strictement supérieure à $1 + s$, ce qui est impossible. Donc la somme est infinie : joli aussi, non ? C'est Mengoli qui a démontré que la série harmonique alternée $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ a pour somme $\ln(2)$, et nous vous avons proposé sa démonstration dans le devoir. Il avait aussi remarqué que

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n},$$

et en avait déduit

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < 2,$$

4. M.A. Coppo : Une histoire des séries infinies, d'Oresme à Euler (2010)

sans réussir à calculer la somme exacte. Ce sera un des grands succès d'Euler, presque un siècle plus tard.

Au fait : pourquoi série harmonique ? En musique, une série harmonique est une série de sons dont la fréquence est un multiple entier du son fondamental. Mettons que vous jouiez un La, qui comme le dit votre diapason est un son de 440 Hz. Le La de l'octave au-dessus est à 880 Hz, celui de l'octave en-dessous à 220 Hz. La note de tierce majeure, Do#, est dans un rapport de 5/4 avec le son fondamental : donc une fréquence de 550 Hz (ou 275 ou 1100...). Quant à la quinte qui complète l'accord parfait (La-Do#-Mi pour La majeur), son rapport avec le son fondamental est 3/2, donc une fréquence de 660 Hz (ou 330, ou 1320...). Si vous ne jouez que les notes de l'accord parfait de La Majeur (ça peut devenir lassant à la longue), vous entendrez des fréquences de 110, 220, 330, 440, 550 Hz... donc des vibrations dont les longueurs d'onde sont, à une constante près des inverses d'entiers. Si vous vous ennuyez pendant le concert, songez que pendant au moins 2 millénaires après Pythagore, la musique a été considérée comme une partie des mathématiques, au même titre que l'arithmétique et l'analyse.

3.4 De seriebus divergentibus

Cet article a été écrit en 1755 et son titre fleure bon le latin de cuisine. Le contenu est à faire dresser les cheveux sur la tête. En voici quelques perles.

Une série est dite convergente si ses termes forment une suite décroissante vers 0.

La série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ serait donc convergente ? Un peu oui ! Et même pire :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} &= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \\ -1 &= 1 + 2 + 4 + 8 + \dots \\ -\frac{1}{2} &= 1 + 3 + 9 + 27 + \dots\end{aligned}$$

Une fraction somme d'entiers ? Un nombre négatif somme d'une infinité d'entiers positifs ? « Il semble conforme à la vérité de dire que les mêmes quantités qui sont inférieures à zéro peuvent être évaluées comme plus grandes que l'infini en même temps ». Depuis que vous savez ce qu'est la convergence d'une série, vous avez acquis le droit de ricaner : c'est du grand n'importe quoi ! Sauf que l'auteur n'est autre que Léonard Euler (1707–1783). Alors on remballe les sarcasmes, et on essaie de comprendre ce que dit le monsieur.

Il n'est pas dupe⁵.

Assez notable est la controverse sur la série $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ dont la somme a été donnée par Leibniz comme étant 1/2, bien que d'autres ne

5. V.S. Varadarajan : Euler and his work on infinite series *Bull. Amer. Math. Soc.*, 44(4) p. 515–539 (2007)

soient pas d'accord. Personne n'a encore assigné de valeur à cette somme, et donc la controverse porte sur la question de savoir si les séries de ce type ont une somme. La compréhension de cette question réside dans le mot « somme » ; cette idée, si on la conçoit ainsi –la somme d'une série est la quantité dont on s'approche d'autant plus qu'on ajoute plus de termes– ne vaut que pour les séries convergentes, et nous devrions en général abandonner cette idée pour des sommes de séries divergentes.

La controverse en question avait débuté en 1703 avec un travail de Guido Grandi (1671–1742) sur la quadrature du cercle (un de plus). Quand Grandi évoque la série alternée $\sum(-1)^n$, il se montre conscient des différentes « sommes » possibles.

$$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \cdots = 0 ,$$

$$1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \cdots = 1 ,$$

Mais aussi,

$$S = 1 - \left((1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \cdots \right) = 1 - S \implies S = \frac{1}{2} .$$

C'est ce dernier résultat qui a sa faveur, car il est cohérent avec la série géométrique,

$$1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1 - x} ,$$

prise en $x = -1$. Après Grandi, bien d'autres mathématiciens ajoutent leur grain de sel : Wolff, Marchetti, Nicolas et Daniel Bernoulli, Goldbach... Leibniz prend position en faveur de $1/2$ et ajoute un argument probabiliste : si on calcule une somme partielle « au hasard », on a autant de chances d'obtenir 0 ou 1 : l'espérance est $1/2$. Dans l'esprit de ces savants du siècle des lumières, il ne faisait aucun doute que si Dieu avait mis cette série devant leurs yeux, Il avait une bonne raison pour cela ; non seulement la somme ne pouvait qu'exister, mais encore elle devait servir à quelque chose, et leur tâche était précisément de découvrir à quoi. C'est bien le but qu'Euler se propose d'atteindre : « Grâce à cette définition, nous allons prouver l'utilité des séries divergentes, et les protéger de toute injustice. »

En 1755, le critère de convergence des séries alternées était déjà bien connu : il avait été énoncé par Leibniz, dans une lettre du 10 janvier 1714. « Les séries alternées sont convergentes si le terme général décroît vers 0 ». Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à termes strictement positifs, décroissante, et convergeant vers 0. Soit

$$s = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$$

la somme de la série alternée. Voici ce que remarque Euler :

$$2s = a_0 + (a_0 - a_1) - (a_1 - a_2) + \cdots = a_0 - \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \Delta^1 a_n ,$$

où l'opérateur aux différences Δ^1 transforme la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en la suite des différences successives $(a_{n+1} - a_n)$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \Delta^1 a_n = a_{n+1} - a_n.$$

La nouvelle série $\sum (-1)^n \Delta^1 a_n$ est encore une série alternée et on peut lui appliquer le même procédé, pour arriver à une troisième série alternée, faisant intervenir les différences secondes.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \Delta^2 a_n = \Delta^1 a_{n+1} - \Delta^1 a_n = a_n - 2a_{n+1} + a_{n+2}.$$

En itérant le procédé, Euler parvient au résultat suivant.

Théorème 10 (Euler).

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \Delta^n a_0,$$

où

$$\Delta^n a_0 = \Delta^{n-1} a_0 - \Delta^{n-1} a_1 = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} a_k.$$

Vous avez tous les outils pour démontrer rigoureusement ce résultat, et même plus.

Définition 5. On appelle transformation binomiale l'application qui à une suite de réels $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ associe la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$b_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} a_k.$$

1. Commencez par démontrer que la transformation binomiale est *involution* :

$$a_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} b_k.$$

(Aucun rapport avec les séries, c'est juste un bon exercice).

2. Supposons que la série $\sum (-1)^n a_n$ converge. Démontrez que pour tout complexe z tel que $|z| < 1$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente. On note $f(z)$ sa somme.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

(Là, il y a plutôt un rapport avec le chapitre sur les séries entières, mais c'est aussi un bon exercice).

3. Pour $z \neq 1$, on pose :

$$g(z) = \frac{1}{1-z} f\left(\frac{-z}{1-z}\right).$$

Montrez que

$$g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n.$$

4. Déduisez de ce qui précède que

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} f(-1) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n.$$

Le miracle est dans le $\frac{1}{2^n}$: typiquement, la transformation d'Euler remplace une série à convergence lente (reste r_n de l'ordre de n^{-1}) en une convergence rapide (reste à décroissance géométrique). Voici un exemple. Pour $a_n = \frac{1}{n+1}$, nous avons vu que la série alternée converge lentement vers $\ln(2)$.

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2).$$

La série transformée est :

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.2^2} + \frac{1}{3.2^3} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)2^{n+1}} = \ln(2),$$

qui converge beaucoup plus rapidement. Mais alors, puisque cela marche si bien pour les séries convergentes, pourquoi se gêner ? Pour $\sum (-1)^n$, la série transformée est :

$$\frac{1}{2} + 0 + 0 + 0 + 0 + \dots = \frac{1}{2}.$$

Difficile de trouver plus rapide comme convergence !

Souvenez-vous qu'au temps d'Euler, il n'y avait pas d'autre moyen pour connaître la somme d'une série que de calculer suffisamment de termes à la main, puis de les additionner : il était peut-être encore plus crucial qu'aujourd'hui d'obtenir la meilleure précision possible dans un temps de calcul donné. Les *méthodes d'accélération de convergence* consistent à remplacer une série par une autre de même somme et de convergence plus rapide. Elles sont apparues très tôt. Des dizaines ont été inventées, et sont implémentées de nos jours dans les logiciels de calcul. Nous venons de vous présenter la méthode d'Euler pour les séries alternées. Il en avait découvert d'autres, dont une qui lui avait permis en 1735 de deviner la solution au fameux *problème de Bâle* :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Ce fut le point de départ des recherches sur la *fonction zéta*, qui allait jouer en mathématiques un rôle aussi central que le Théorème de Fermat :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Nous aurons certainement l'occasion de vous en reparler !

3.5 Vous avez le choix !

Prenez une série $\sum u_n$ convergente, mais non absolument convergente, par exemple $\sum (-1)^n/n$. Nous vous avons fait démontrer en exercice qu'on peut en permutant les termes, obtenir n'importe quelle somme, y compris $\pm\infty$. Vous pouvez préférer que ce soit Cauchy qui vous le dise⁶.

Si les différents termes de la série proposée étaient les uns positifs, les autres négatifs, il pourrait arriver que la série fût convergente, et que les termes dans lesquels la somme des indices serait au moins égale à n , étant ajoutés les uns aux autres dans un certain ordre, ne donnassent pas toujours une somme infiniment petite pour des valeurs infiniment grandes de n . Cette remarque est applicable même aux séries simples. Ainsi, en particulier, si l'on considère la série simple

$$1, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots, \pm\frac{1}{n}, \dots, \quad (6)$$

[...] on peut affirmer que la somme s_n convergera pour des valeurs croissantes de n vers une limite fixe s et que la série (6) sera convergente. Mais si au lieu d'ajouter les uns aux autres les termes [...] pris dans l'ordre où ils se trouvent, on venait à intervertir cet ordre en choisissant parmi eux des termes affectés du même signe, par exemple les suivants

$$\pm\frac{1}{n+2}, \pm\frac{1}{n+4}, \dots, \pm\frac{1}{n+2n} = \pm\frac{1}{3n},$$

la valeur numérique de la somme de ces derniers termes, savoir

$$\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+4} + \dots + \frac{1}{3n}$$

surpasserait évidemment le produit

$$n \times \frac{1}{3n}$$

et cesserait d'être infiniment petite pour des valeurs infiniment grandes de n .

6. L.A. Cauchy, *Résumés analytiques*, p. 85 *Imprimerie Royale, Turin (1833)*

Par contre, pour une série absolument convergente, on peut permuter les termes comme on veut sans modifier ni la convergence absolue, ni la somme (on dit que la série est *commutativement convergente*). Voici le résultat, énoncé par un autre mathématicien du XIX^e, beaucoup moins prestigieux mais peut être un tantinet plus pédagogue, Charles Cellérier (1818–1889)⁷.

Observons que, si une série convergente a tous ses termes positifs, on peut à volonté changer leur ordre, en réunir plusieurs en un seul, ou réciproquement remplacer un seul par d'autres tous positifs, dont il est la somme ; on peut aussi mettre à part des termes en nombre infini, la somme des deux séries formées soit par ceux-là, soit par ceux qui restent, reproduit la primitive. Convenons, pour abréger, de dire qu'une série est *numériquement* convergente lorsqu'elle a des termes positifs et négatifs, mais reste convergente en les prenant tous avec le signe +. Dans ce cas également, on peut changer à volonté l'ordre des termes, remplacer quelques-uns d'entre eux, même en nombre infini, par un seul égal à leur somme, et en répétant l'opération, remplacer la série primitive par une autre dont les termes soient eux-mêmes des séries. Il suffit que tout terme choisi à volonté dans l'ordre ancien ait sa place déterminée dans l'ordre nouveau.

7. Ch. Cellérier, Note sur les principes fondamentaux de l'analyse, *Bull. Sci. Math., deuxième série*, tome XIV, pp. 142–160 (1890)