

Cours 2

Loi de Hooke généralisée

1. État de contrainte tridimensionnelle en un point

En chaque point M d'un solide, il existe des forces intérieures que l'on met en évidence en effectuant une coupure du solide, par une surface S , en deux parties A et B (Fig. 2.1)

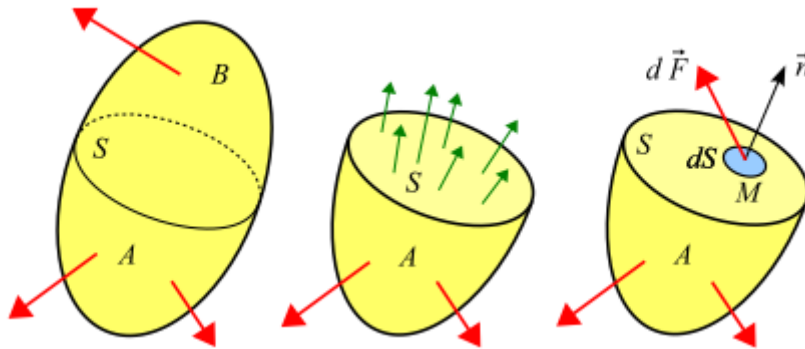


Fig. 2.1 Coupure et facette $\vec{n}$ en M

La partie A, par exemple, est en équilibre sous l'action des forces extérieures qui lui sont directement appliquées et des forces intérieures réparties sur la coupure.

Considérons un point M de S . Soit dS un élément infinitésimal de la surface S entourant M et $\vec{n}$ le vecteur unitaire, perpendiculaire en M à S et dirigé vers l'extérieur de la partie A. Nous appellerons cet ensemble facette $\vec{n}$ en M . Soit $d\vec{F}$ la force qui s'exerce sur cette facette. On appelle vecteur contrainte sur la facette $\vec{n}$ en M , la quantité :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \frac{d\vec{F}}{dS}$$

Remarque : une contrainte s'exprime en pascal ($1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$) ; dans la pratique, on utilise souvent le méga pascal ($1 \text{ MPa} = 10^6 \text{ Pa} = 1 \text{ N/mm}^2$)

Considérons, en un point M , le cylindre infiniment petit d'axe $\vec{n}$, de hauteur h et de section dS (Fig. 2.2).

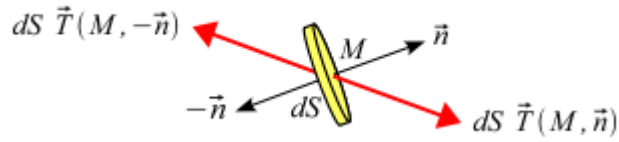


Fig. 2.2 Efforts sur les facettes $\vec{n}$ et $-\vec{n}$

Le vecteur contrainte peut être décomposé en sa composante suivant $\vec{n}$ et sa projection sur la facette (Fig. 2.3) :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \sigma_n \vec{n} + \vec{\tau}_n$$

$$\sigma_n = \vec{n} \cdot \vec{T}(M, \vec{n})$$

σ_n est la contrainte normale et $\vec{\tau}_n$ est le vecteur cisaillement ou contrainte tangentielle. σ_n est une valeur algébrique positive (traction) ou négative (compression).

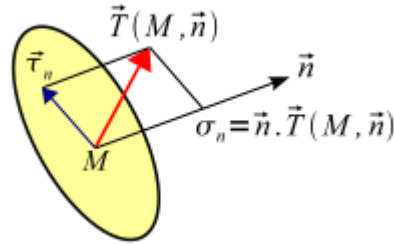


Fig. 2.3 Vecteur contrainte sur la facette $\vec{n}$ en M

Tenseur des contraintes

Considérons le tétraèdre infiniment petit MABC construit sur les axes x, y et z (Fig.2.4). Soient $\vec{n}$ de composantes (n_x, n_y, n_z) la normale unitaire au plan ABC dirigée vers l'extérieur du tétraèdre et dS l'aire du triangle ABC.

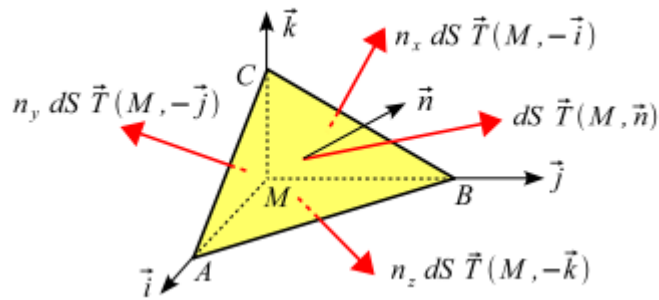


Fig. 2.4 Equilibre du tétraèdre (Cauchy)

On a

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} &= 2dS \vec{n} \\ &= 2dS(n_x \vec{i} + n_y \vec{j} + n_z \vec{k}) \end{aligned}$$

$$= 2dS n_x \vec{i} + 2dS n_y \vec{j} + 2dS n_z \vec{k}$$

On a aussi

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} &= (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}) \wedge (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC}) \\ &= (\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}) \wedge (\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA}) \\ &= \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MA} \\ &= \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} + \vec{0} \\ &= 2\text{aire}(MBC) \vec{i} + 2\text{aire}(MAC) \vec{j} + 2\text{aire}(MAB) \vec{k} \end{aligned}$$

On en déduit par identification :

$$\text{aire}(MBC) = n_x dS, \text{aire}(MAC) = n_y dS, \text{aire}(MAB) = n_z dS$$

Le tétraèdre est en équilibre sous l'action des forces appliquées sur ses faces (les forces de volume sont des infiniment petits d'ordre supérieur) :

$$dS \vec{T}(M, \vec{n}) + n_x dS \vec{T}(M, -\vec{i}) + n_y dS \vec{T}(M, -\vec{j}) + n_z dS \vec{T}(M, -\vec{k}) = \vec{0}$$

Il vient après simplification :

$$dS \vec{T}(M, \vec{n}) = n_x dS \vec{T}(M, \vec{i}) + n_y dS \vec{T}(M, \vec{j}) + n_z dS \vec{T}(M, \vec{k})$$

Cette équation s'écrit sous forme matricielle :

$$\{\vec{T}(M, \vec{n})\} = [\sigma(M)]\{n\}$$

Où $[\sigma(M)]$ est le **tenseur des contraintes de Cauchy** en M.

Les composantes du tenseur des contraintes dans le repère $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ sont :

$$\vec{T}(M, \vec{i}) \quad \vec{T}(M, \vec{j}) \quad \vec{T}(M, \vec{k})$$

$$\begin{Bmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

Exemple : sur la facette $\vec{i}$ (figure 2.4), le vecteur contrainte est

$$\vec{T}(M, \vec{i}) = \sigma_{xx} \vec{i} + \sigma_{yx} \vec{j} + \sigma_{zx} \vec{k}$$

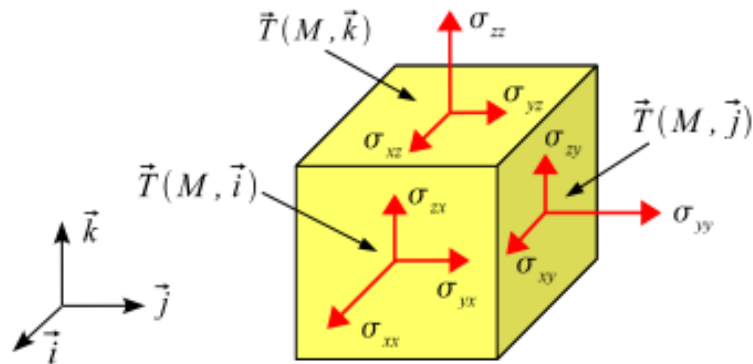


Fig. 2.5 Vecteur contrainte sur les facettes $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ en M

Principe de superposition des effets des sollicitations normales :

Ce principe consiste à décomposer la sollicitation appliquée à une structure en une somme de sollicitations élémentaires pour lesquelles, il est aisé de déterminer, à partir de la géométrie initiale, l'état de contrainte et de déformation induite correspondante, puis de déterminer l'état de déformation globale par addition de ces états élémentaires de déformation. Cette approche n'est applicable que pour les petites déformations¹.

Indépendance des effets de sollicitations de cisaillement

Les forces de cisaillements jouent un rôle très important dans le comportement des matériaux. Ce sont des forces de cisaillement qui interviennent quand on applique les patins d'un frein sur la jante d'une roue de vélo ou les mâchoires d'un frein à disque de voiture.

Un exemple de déformation en cisaillement est représenté ci-dessous :

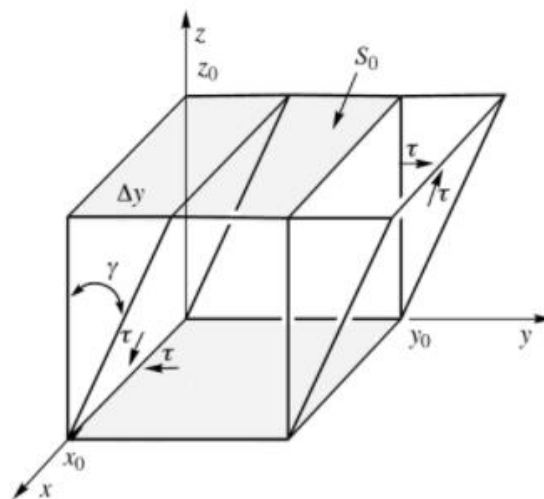


Fig. 2.6 Vecteur contrainte tangentielle d'un volume représentatif

¹ Une réponse élastique pour de très petites déformations $\epsilon \approx 0.001$

Une barre prismatique est fixée par une face de surface S_0 sur un support rigide, tandis que sur la face opposée, on applique une force transversale F parallèle au plan xy . Cette force induit une déformation qui est mesurée par l'angle de cisaillement $\gamma = \Delta y/z_0$

Pour cette déformation qui s'effectue à volume constan, il existe une relation entre la contrainte par unité de surface (la scission) $\tau = F/S_0$ et l'angle de cisaillement γ

$$\tau = G. \text{tg}\gamma \approx G. \gamma$$

Le module correspondant à cette déformation est le module de cisaillement.

Loi de Hooke généralisée :

La loi de Hooke a été généralisée aux états triaxiaux et aux matériaux anisotropes en écrivant de la manière la plus générale possible, que chaque élément du tenseur des contraintes est une combinaison linéaire de tous les éléments du tenseur :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad \text{où } i, j, k, l = 1, 2, 3$$

Cette loi, généralement appelée loi de Hooke généralisée, introduit la matrice de rigidité C , symétrique. Le comportement linéaire d'un matériau est donc décrit dans le cas général par 21 coefficients indépendants.

La forme matricielle :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\varepsilon}}$$

La forme inverse

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl}$$

Dans ces relations, $\underline{\underline{C}}$ est un tenseur de quatrième ordre, dont les composantes sont les coefficients d'élasticité du matériau.

La déformation volumique et la contrainte hydrostatique

Déformation volumique

La déformation ou dilatation volumique est la somme des termes diagonaux :

$$\varepsilon_V = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1 - 2\nu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

Contrainte hydrostatique (uniforme) :

La contrainte hydrostatique ou pression hydrostatique constitue le troisième type de déformation simple. Celui-ci apparaît lorsqu'un solide est soumis à une pression hydrostatique. Il existe une relation entre la pression hydrostatique (contrainte) et la variation relative de volume :

$$\Delta = \frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \text{tr}[\varepsilon]$$

La contrainte s'écrit :

$$\sigma_h = -\Delta K$$

Dans cette expression, K est le module de compressibilité volumique. Le signe négatif qui intervient dans cette expression résulte de ce que la variation de volume est négative lorsque la pression est positive (pression positive induit une réduction de volume).

Le module hydrostatique

$$K = -\frac{\sigma_h}{\Delta}$$

$$E = \frac{9KG}{G + 3K} = 3K(1 - 2\nu) = 2G(1 + \nu)$$

Quantités élastiques volumiques invariantes

Prenons la décomposition des tenseurs en une contribution sphérique hydrostatique et un terme complémentaire nommé tenseur déviateur :

Pour les contraintes (avec la sommation d'Einstein) :

$$[\sigma_{ij}] = \sigma_m [\delta_{ij}] + [S_{ij}]$$

Où δ_{ij} est le tenseur unité de Kronecker $\delta_{ij} = 1$ qd $i = j$ et $\delta_{ij} = 0$ qd $i \neq j$

$[\sigma_{ij}]$: Tenseur de contrainte

$[\sigma_m]$: Tenseur sphérique hydrostatique

$[S_{ij}]$: Tenseur déviateur (déviatorique)

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_{xx} & s_{xy} & s_{xz} \\ s_{yx} & s_{yy} & s_{yz} \\ s_{zx} & s_{yz} & s_{zz} \end{bmatrix}$$

$$[\sigma_m] = \begin{bmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & P \end{bmatrix} \text{ avec } P = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

P : La pression isostatique

$$[S_{ij}] = \begin{bmatrix} s_{xx} & s_{xy} & s_{xz} \\ s_{yx} & s_{yy} & s_{yz} \\ s_{zx} & s_{yz} & s_{zz} \end{bmatrix}$$

Dont le premier invariant est nul :

$$J_1 = 0 \Rightarrow Tr[S_{ii}] = 0 \Rightarrow S_{xx} + S_{yy} + S_{zz} = 0$$

Le deuxième invariant est :

$$J_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2] + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2$$

Le troisième invariant est :

$$J_3 = S_x S_y S_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{xz} - S_z\tau_{xy}^2 - S_x\tau_{yz}^2 - S_y\tau_{xz}^2$$

Forme de la matrice de rigidité et Nombres de constantes d'élasticité :

On exprime les contraintes en fonction de déformations. La loi de comportement qui s'écrit sous forme matricielle :

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}$$

$\{\sigma\}$ et $\{\varepsilon\}$ les composantes indépendantes des tenseurs des contraintes et des déformations présentées sous forme vectorielle (Notations de Voigt) comme suit :

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \end{Bmatrix} \text{ et } \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} = 2\varepsilon_{23} \\ \gamma_{13} = 2\varepsilon_{13} \\ \gamma_{12} = 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix}$$

$[D]$ appelée la matrice de rigidité ou matrice des coefficients élastiques.

Matrice de rigidité d'un matériau anisotrope et Nombres de constantes d'élasticité

Dans le cas le plus général, la matrice de rigidité (matrice des coefficients élastiques) est déterminée par 21 constantes indépendantes. Ce cas correspond à un matériau ne possédant aucune propriété de symétrie. Un tel matériau est appelé matériau triclinique ou matériau anisotrope.

La loi de comportement sous forme matricielle s'écrit :

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}}_{\{\sigma\}} = \underbrace{\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix}}_{[D]} \underbrace{\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} = 2\varepsilon_{23} \\ \gamma_{13} = 2\varepsilon_{13} \\ \gamma_{12} = 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix}}_{\{\varepsilon\}}$$

Matrice de rigidité d'un matériau orthotrope

Un matériau orthotrope possède trois plans de symétrie, perpendiculaires deux à deux. Il est à noter que l'existence de deux plans de symétrie perpendiculaires implique l'existence du troisième. La matrice de rigidité dans ce cas est déterminée par 12 constantes indépendantes.

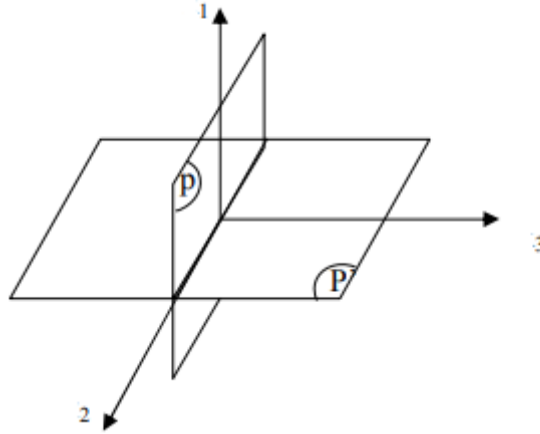


Fig. 2.7 Plans de symétrie d'un matériau orthotrope.

La forme de la matrice de rigidité est donc :

$$[D] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}$$

Le nombre de constantes d'élasticité indépendantes est ramené à 9.

Matrice de rigidité d'un matériau cubique

Pour un matériau élastique homogène isotrope, toutes les directions ont les mêmes propriétés. Ce modèle s'applique à la plupart des matériaux, tel l'acier, le béton etc...

En utilisant les propriétés de symétrie des tenseurs des contraintes et des déformations, c'est-à-dire $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ et $\epsilon_{kl} = \epsilon_{lk}$, et par conséquent $C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{jilk}$.

Le nombre de constantes d'élasticité indépendantes est donc réduit à 2, et conduit à la matrice de rigidité :

$$[D] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} \end{bmatrix}$$

Dans cette forme on exprime les contraintes en fonction de déformations. La loi de comportement $\bar{\sigma} = \bar{\bar{C}} \bar{\epsilon}$ se réduit à :

$$\bar{\sigma} = \lambda \cdot \text{Trace}(\bar{\epsilon}) \cdot \bar{I} + 2\mu \cdot \bar{\epsilon}$$

Qui s'écrit en notation indicielle :

$$\sigma_{ij} = \lambda \cdot \epsilon_{kk} \cdot \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}$$

Ou encore sous forme matricielle :

$$\{\sigma\} = [D]\{\epsilon\}$$

La matrice des coefficients élastiques est égale à :

$$[D] = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}$$

Où λ et μ sont appelés les coefficients de Lamé qui dépendent de la particule considérée. Leurs expressions en fonction du module d'Young et du coefficient de Poisson ν sont données comme suit :

$$\mu = G = \frac{E}{2(1 + \nu)}; \quad \lambda = \frac{\nu \cdot E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}; \quad \lambda + 2\mu = \frac{E \cdot (1 + \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$$

Ou encore :

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}; \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

La matrice de rigidité isotrope peut s'écrire également comme suit :

$$[D] = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} 1 - \nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 - \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1 - \nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1 - 2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1 - 2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1 - 2\nu}{2} \end{bmatrix}$$

On obtient une relation entre σ et ϵ :

$$\sigma = (3\lambda + 2\mu)\epsilon \quad \text{ou encore} \quad \sigma = 3K\epsilon \quad \text{avec} \quad K = \frac{3\lambda + 2\mu}{3}$$