Université de Relizane

Faculté des Sciences et Technologie

Département de Génie Mécanique

-2021/2022-

TD1 MMC

S5- 3ème GM

Q1 : Donner les définitions des termes suivants :

- ***Comportement élastique***
- ***Matériaux homogènes***
- ***Matériaux isotropes***

Q2 : Quelle est l'origine de l'élasticité dans les matériaux ?

Exercice 1 :

1) Soient X et A deux tenseur donnés par

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Déterminer : $Tr[A]$; $[A] \cdot [A]^T$;

2) On considère dans l'espace Euclidien E_3 rapporté au repère orthonormé $(oe_1e_2e_3)$, deux fonctions scalaires $u = u(x_1, x_2, x_3)$ et $w = w(x_1, x_2, x_3)$.

On note : $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$; $\nabla = \partial_i e_i$ et $(.)$ et $(\wedge)$ les produits scalaire et vectoriel.

Que représentent les quantités suivantes

a) $\Delta = \nabla . \nabla$ b) ∇u c) Δw d) $\nabla \wedge (\nabla u)$

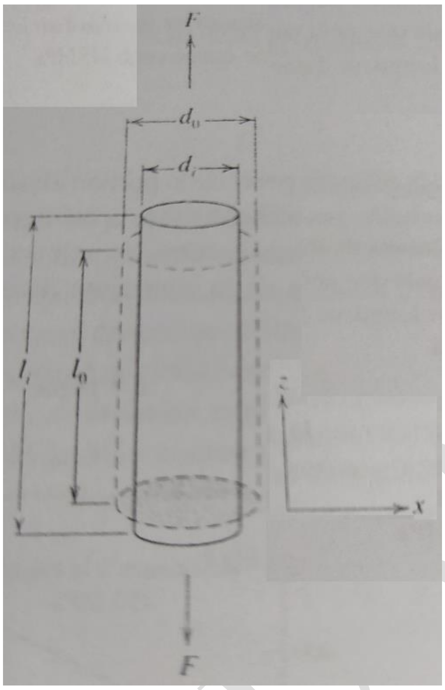
3) Considérons la matrice suivante

$$[R] = \begin{bmatrix} \vec{\imath}'.\vec{\imath} & \vec{\jmath}'.\vec{\imath} & \vec{k}'.\vec{\imath} \\ \vec{\imath}'.\vec{\jmath} & \vec{\jmath}'.\vec{\jmath} & \vec{k}'.\vec{\jmath} \\ \vec{\imath}'.\vec{k} & \vec{\jmath}'.\vec{k} & \vec{k}'.\vec{k} \end{bmatrix}$$

Déduire que : $[R]^{-1} = [R]^T$, $det[R] = 1$

Exercice 2 :

On applique une contrainte de traction le long de l'axe longitudinal d'une tige cylindrique en laiton ($E = 97GPa, \nu = 0.34$) dont le diamètre est de $10mm$. Calculez la charge nécessaire pour rétrécir le diamètre de $2.5 * 10^{-3}mm$ si la déformation est entièrement élastique.

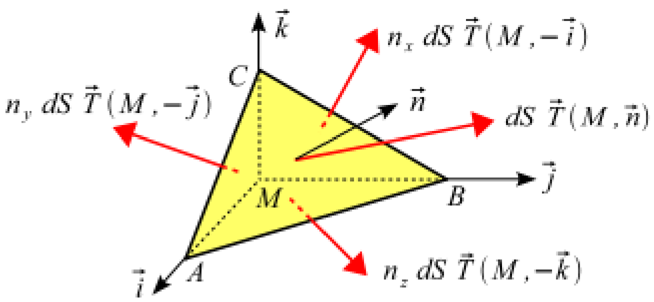


$$\varepsilon_z = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l_i - l_0}{l_0}$$

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta d}{d_0} = \frac{d_i - d_0}{d_0}$$

Exercice 3 :

Considérons le tétraèdre infiniment petit MABC construit sur les axes x, y et z. Soient $\vec{n}$ de composantes $(\boldsymbol{n_x}, \boldsymbol{n_y}, \boldsymbol{n_z})$ la normale unitaire au plan ABC dirigée vers l'extérieur du tétraèdre et dS l'aire du triangle ABC.



1°) Le tétraèdre est en équilibre sous l'action des forces appliquées sur ses faces. Montrer que l'équation d'équilibre s'écrit sous la forme suivante :

$$\boldsymbol{dS\,\vec{T}(M,\vec{n}) = n_x dS\,\vec{T}(M,\vec{\imath}) + n_y dS\,\vec{T}(M,\vec{\jmath}) + n_z dS\,\vec{T}(M,\vec{k})}$$

2°) Quelle est sa forme matricielle ?

Exercice 4 :

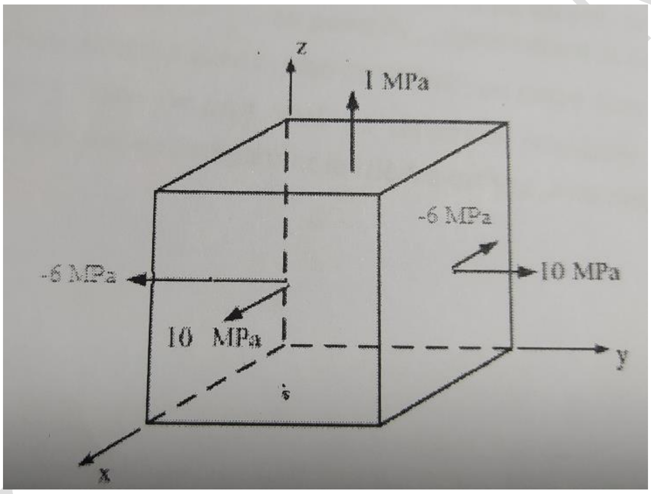
Les composantes du tenseur des contraintes dans le repère $\{\vec{\boldsymbol{\imath}}, \vec{\boldsymbol{\jmath}}, \vec{\boldsymbol{k}}\}$ sont :

$$\begin{array}{c|ccc} & \vec{T}(M,\vec{\imath}) & \vec{T}(M,\vec{\jmath}) & \vec{T}(M,\vec{k}) \\ \hline \begin{cases}\vec{\imath}\\ \vec{\jmath}\\ \vec{k}\end{cases} & \multicolumn{3}{c}{\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}} \end{array}$$

1°) Représenter les contraintes sur un volume représentatif.

2°) Déterminer les vecteurs contraintes sur chaque facette.

3°) Soit l'état de contraintes schématisé ci-dessous sur le cube élémentaire d'arêtes parallèles aux axes choisis.



a) Ecrivez le tenseur de contraintes $[\boldsymbol{\sigma}_{ij}]$ correspondant.
b) Décomposez ce tenseur en sa somme d'une partie hydrostatique et d'une partie déviatoire. En déduire les invariants volumiques.

Exercice 5 :

Une barre de longueur l et de section S est taillée dans un solide homogène et isotrope. Lorsque la barre est soumise à un effort longitudinal F suivant l, sa longueur varie de Δl entrainant une variation algébrique relative $\frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta b}{b}$ de chacune des dimensions transversales.

a) Donner les expressions du module de Young E ($E = \frac{F}{S}.\frac{l}{\Delta l}$) et du coefficient du poisson ($\nu = -\frac{\Delta a/a}{\Delta l/l}$) en fonction des coefficients de raideur C_{ij}.
b) A partir de l'expression $\frac{F}{S} = \lambda\frac{\Delta V}{V} + 2\mu\frac{\Delta l}{l}$ dans laquelle $\frac{\Delta V}{V}$ représente la variation relative du volume de la barre soumise à la tension $\frac{F}{S}$. Expliciter de même les coefficients de Lamé $\lambda\ et\ \mu$.